



Automates cellulaires non-uniformes

Julien Provillard

► To cite this version:

Julien Provillard. Automates cellulaires non-uniformes. Mathématique discrète [cs.DM]. Université Nice Sophia Antipolis, 2012. Français. NNT: . tel-01297387

HAL Id: tel-01297387

<https://hal.science/tel-01297387>

Submitted on 4 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS
ÉCOLE DOCTORALE STIC
Science et technologie de l'information et de la communication

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS
Spécialité : Informatique

par
Julien PROVILLARD

sous la direction du Pr. Enrico FORMENTI

Titre :

AUTOMATES CELLULAIRES NON-UNIFORMES

soutenue publiquement le 06 décembre 2012

JURY

M. Olivier CARTON	Université Paris Diderot	<i>Rapporteur</i>
M. Julien CERVELLE	Université Paris-Est Créteil Val de Marne	<i>Examineur</i>
M. Alberto DENNUNZIO	Università degli studi di Milano-Bicocca	<i>Invité</i>
M. Nazim FATÈS	Inria Nancy-Grand-Est	<i>Examineur</i>
M. Enrico FORMENTI	Université Nice Sophia Antipolis	<i>Directeur</i>
M. Nicolas OLLINGER	Université d'Orléans	<i>Rapporteur</i>
M. Nicolas SCHABANEL	Université Paris Diderot	<i>Rapporteur</i>

Sommaire

Remerciements	v
Notations	vii
Introduction	ix
I Systèmes dynamiques	1
I.1 Présentation générale	2
I.2 Automates cellulaires	10
II Automates cellulaires non-uniformes	17
II.1 Définition et premières propriétés	17
II.2 Différences entre CA et ν -CA : exemples	21
III Modèles de perturbation	25
III.1 Surjectivité et injectivité	26
III.2 Propriétés dynamiques	28
IV Nombre fini de règles et propriétés	45
IV.1 Conservation du nombre	45
IV.2 Injectivité et surjectivité	52
IV.3 Equicontinuité et sensibilité	58
V Modes d'acceptation pour ω-langages	77
V.1 Définitions et résultats connus	78
V.2 Les conditions d'acceptation A, A', L et L'	83
V.3 Modes d'acceptation basés sur fin	92
A Mots, langages et automates	97
B Espaces de décalage	103

Remerciements

Tout au long de ces trois années de préparation, j’ai croisé de nombreuses personnes qui m’ont apporté aide, conseils ou soutien. Cette thèse serait incomplète si je ne leur adressais pas mes remerciements.

Il convient avant tout de remercier :

- Enrico, mon directeur de thèse, pour m’avoir accepté en tant que doctorant, m’avoir accordé sa confiance pour traiter ce sujet ambitieux et s’être montré patient et disponible tout au long de mon parcours ;
- Alberto avec qui cette aventure à commencer et dont la persévérance à relire les preuves dans leurs moindres détails a été d’un grand secours pour lever les petites imprécisions présentes et pour en améliorer la lisibilité ;
- Olivier Carton, Nicolas Ollinger et Nicolas Schabanel, pour avoir rapporté ma thèse, et Julien Cervelle et Nazim Fatès pour avoir accepté d’être membre de mon jury ;
- Bruno, Christophe et Sandrine, membres de l’équipe MC3, qui m’ont accueilli et m’ont apporté, particulièrement le jour de la soutenance, une l’aide immense ;
- Jean-Charles, pour les longues discussions que nous avons pu avoir ;
- Gilles pour sa grande disponibilité ;
- et tous les membres du laboratoire I3S et du département informatique de l’université de Nice Sophia Antipolis.

Je voulais aussi remercier mes parents et mon frère qui ont toujours été présents dans les moments de doute et à qui je dois beaucoup.

Notations

Notations générales

\mathbb{N}	l'ensemble des entiers naturels
\mathbb{Z}	l'ensemble des entiers relatifs
\mathbb{Q}	l'ensemble des nombres rationnels
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels
\mathbb{K}^*	l'ensemble \mathbb{K} privé de 0 pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$
\mathbb{K}^+	l'ensemble des nombres positifs de \mathbb{K} pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$
$[i, j]$	l'ensemble des entiers compris entre i et j
$[i, j[$	l'ensemble des entiers compris entre i et $j - 1$
$ x $	la valeur absolue du réel x
$\lfloor x \rfloor$	la partie entière du réel x
$\text{Card}(X)$	le cardinal de l'ensemble X

Notations relatives aux langages (Appendice A)

Σ^*	l'ensemble des mots sur l'alphabet Σ
Σ^ω	l'ensemble des mots infinis sur l'alphabet Σ
Σ^ζ	l'ensemble des mots bi-infinis sur l'alphabet Σ
Σ^∞	l'ensemble $\Sigma^* \cup \Sigma^\omega$
ε	le mot vide
$ u $	la taille du mot u
u_i	la i^{e} lettre du mot u
$u_{[i,j]}$	le facteur du mot u compris entre les indices i et j
uv	la concaténation des mots u et v

Notations relatives aux espaces de décalage (Appendice B)

$X_{\mathcal{F}}$	l'espace de décalage induit par l'ensemble de motifs interdits \mathcal{F}
$X_{\mathcal{G}}$	l'espace de décalage induit par le graphe \mathcal{G}

Notations diverses

σ	le shift (pp. 10 et 101)
$[u]_i$	le cylindre défini par le mot u à l'indice i (p. 11)
H_θ	le ν -CA induit par la distribution θ (p. 17)
$\delta_{i,j}$	le symbole de Kronecker (p. 47)

Introduction

Depuis plusieurs décennies, l'informatique est devenu incontournable dans les sciences comme dans l'industrie. Avec les améliorations constantes aussi bien matérielles que logicielles des ordinateurs, des calculs qui pouvaient prendre toute une vie peuvent s'effectuer bien plus rapidement. Les perspectives sont diverses et variées. Sur le plan des sciences, des théories et des modèles qui ne pouvaient alors être étudiés que de manière statistique ont pu alors recevoir des validations par le calcul exact. Les prévisions ont également pu être affinées et étendues. L'exemple le plus parlant étant les modèles météorologiques qui ont gagné en précision et qui permettent des prévisions à plus longue échéance. En effet, ces prévisions sont faites en continu et le modèle doit fournir rapidement des résultats pour que ceux-ci s'avèrent utiles. Dans le cadre de la recherche, les expériences classiques se révèlent de plus en plus coûteuses. Ainsi de nombreuses simulations *in silico* sont effectuées préalablement à la réalisation proprement dite de l'expérience. Ces simulations visent à déterminer la pertinence du protocole, de valider le mode opératoire ou de sélectionner une plage de paramètres particulièrement adaptés. Dans la recherche médicale où des centaines, voire des milliers de molécules, peuvent, a priori, se révéler intéressantes, la simulation informatique permet d'en sélectionner quelques dizaines et seules celles-ci seront testées dans des conditions réelles.

Cependant, cette puissance de calcul n'est qu'un outil au service de la modélisation et de la simulation. Elle permet de valider un modèle par rapport à des situations connues et maîtrisées puis de simuler dans des cadres inconnus et de prévoir. Il y a donc avant tout un travail théorique quant à la construction du modèle utilisé puis une phase d'expérimentation. Ainsi de nombreux modèles ont vu le jour, du plus général au plus particulier, afin de répondre à des besoins plus ou moins spécifiques. Leur étude a contribué à l'essor de plusieurs domaines des mathématiques et de l'informatique au cours du siècle dernier. Les systèmes dynamiques sont un exemple de tels modèles. Issus à l'origine de la mécanique newtonienne, ils présentent de nos jours une grande variété de formes. Ce sont des systèmes déterministes qui, à l'aide d'une loi d'évolution, permettent de décrire l'ensemble des états futurs du système en fonction de son état actuel. Ils s'opposent aux systèmes stochastiques qui relèvent de la théorie des probabilités. La loi d'évolution

se présente souvent sous la forme d’une variation de l’état du système sur un court laps de temps qui peut être infinitésimal (équations différentielles, équations aux dérivées partielles) ou discret (récurrence, itération d’un processus). Résoudre le système revient à trouver une expression de l’état du système à tout instant, étant donnée une condition initiale. La résolution se révèle souvent ardue et nécessite des techniques mathématiques sophistiquées. Quand la résolution explicite est impossible ou que la forme de la solution est inexploitable, on utilise alors des approximations et la simulation informatique. Cependant, on sait, depuis les études de Poincaré sur la stabilité du système solaire, que certains systèmes sont très sensibles à leurs paramètres. La moindre incertitude sur les paramètres peut amener à des divergences sensibles sur la dynamique. Du point de vue de la simulation informatique, ce phénomène a été mis en évidence par Lorenz lors de l’étude de modèles météorologiques. De nombreuses notions ont alors été développées pour caractériser la stabilité ou l’absence de stabilité d’un système, notions qui sont à la base de la théorie du chaos.

Cette forme d’instabilité n’est pas la seule que l’on rencontre dans les systèmes dynamiques. En effet, certains modèles ont des structures complexes ou utilisent des conditions fortes dans leur définition. Tout comme prévoir la réaction d’un système lorsque l’on perturbe légèrement son état, il est intéressant de connaître l’influence d’une altération faible de la structure ou l’effet d’un léger affaiblissement d’une condition. On parle alors de stabilité structurelle. Cette notion est liée à la robustesse et à la résilience aux erreurs du système. Il est souvent nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices lors de l’étape de modélisation et de négliger certaines interactions jugées de faible importance. S’intéresser à la stabilité structurelle permet de tester ces hypothèses. Dans le cas d’implémentation physique du modèle, l’étude de la stabilité structurelle permet d’analyser les modifications apportées au système en cas de panne ou d’altération.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à un système dynamique particulier : les automates cellulaires. Ce sont des systèmes dynamiques discrets dont l’espace des phases, c’est-à-dire l’ensemble des états qui leur sont accessibles, est composé d’automates finis disposés sur un réseau régulier, usuellement une grille. Chacun de ces automates se trouve, à un instant donné, dans un certain état et l’ensemble de ces états locaux donne l’état global (la *configuration*) de l’automate cellulaire. Tous ces composants sont identiques et se mettent à jour de manière synchrone par itérations successives. Leur nouvel état est calculé à chaque itération à l’aide d’une règle locale à partir des états d’un ensemble fini d’automates voisins. Cette même règle est appliquée simultanément à l’ensemble des automates du réseau. Les principales caractéristiques du modèle sont donc :

- l’interaction locale,
- la mise à jour synchrone en parallèle des états locaux,

– l’uniformité.

Malgré la simplicité de cette définition, un grand nombre de comportements, parfois très complexes, apparaissent lors de l’étude de la dynamique des automates cellulaires. D’ailleurs une classification fine des automates cellulaires en fonction de leurs propriétés est un problème ouvert depuis longtemps [30, 37, 20]. Cette vaste variété de comportements ainsi que les caractéristiques de ces systèmes les rendent particulièrement pertinents pour la modélisation de certains phénomènes naturels (lorsqu’un grand nombre d’éléments identiques sont en interaction de faible portée). On peut citer la réaction-diffusion de particules, la croissance de population, des modèles proie-prédateur, la propagation de feux de forêt [16, 18, 23, 17, 6]. . . Les automates cellulaires sont également très utilisés en informatique comme, entre autres, modèle de calcul [68, 54], pour les codes correcteurs d’erreurs [9] ou pour la cryptographie [69].

La question de la résilience et de la robustesse de ces systèmes se pose différemment selon le cadre dans lequel on se place. En tant que modèles pour les phénomènes naturels, la mise à jour synchrone peut paraître étrange puisqu’il n’existe pas d’horloge dans la nature qui dicte le moment où un état doit se modifier. On peut comprendre l’artifice pour des réactions de diffusions où une particule passe de position en position, les états associés doivent donc être mis à jour simultanément. Dans d’autres cas (croissance de population, modèle proie-prédateur, modèles sociologiques), la question du schéma de mise à jour et de son influence se pose [34]. Lorsque des phénomènes où la topologie joue un rôle important sont modélisés, la forme et la régularité du réseau peut également influencer sur les résultats obtenus. Par exemple, dans [18], les auteurs optent pour un réseau hexagonal au lieu d’une grille carrée afin d’éviter une symétrie trop prononcée du modèle. Des recherches récentes sont menées pour définir des automates cellulaires sur des réseaux non réguliers [45]. En tant que modèle de calcul, les automates cellulaires sont un exemple représentatif de systèmes massivement parallèles. Leurs caractéristiques peuvent cependant se révéler être un frein à son implémentation. La mise à jour synchrone de tous les états locaux implique de synchroniser les différents calculs effectués, ce qui est souvent coûteux. De même, la question de la panne se pose : que se passe-t-il lorsqu’une panne modifie localement le réseau ou la manière dont s’effectue la mise à jour ? Le résultat est-il toujours globalement correct ou au contraire totalement faussé ?

Comme nous venons de le voir, les perturbations peuvent être de nature très différentes en fonction du contexte et de l’importance du paramètre associé. Dans [24], plusieurs types de perturbations sont envisagés : la mise à jour se fait de manière asynchrone, la règle locale est fonction d’un paramètre stochastique ou la topologie du réseau est perturbée. Des études ont également été menées dans le cas de systèmes bruités où des erreurs surviennent de manière intermittente [28]. Dans cet article, l’auteur souligne

d'ailleurs que l'étude dans le cas de pannes persistantes serait d'un grand intérêt.

We will consider the case when a failure does not incapacitate the component permanently, only causes it, in the step when it occurs, to violate its rule of operation. In the following steps, the component obeys its rule of operation again, until the next error. The case of permanent component failure may be of greater practical importance, but it has not been investigated in the same generality.

Nous nous proposons donc de nous atteler à cette étude. Concrètement, nous considérons un automate cellulaire classique puis nous supposons qu'en un certain nombre de sites des pannes interviennent, ce qui modifie le comportement local. Nous nous intéressons alors aux modifications apportées au comportement global du système. Pour ce faire, nous avons développé un formalisme très général d'automates cellulaires non-uniformes. De tels modèles ont déjà été utilisés dans la littérature et sont aussi connus sous le nom d'automates cellulaires hybrides (HCA) [15, 29, 27]. Relaxer la contrainte d'uniformité, tout en préservant les autres avantages du modèle initial (parallélisme massif et localité), présente en effet plusieurs intérêts. Cela permet plus de souplesse dans la modélisation, autorise la présence de sites singuliers et augmente la robustesse du système. Par exemple, il a été démontré dans [46] que la génération de suites pseudo-aléatoires pour la cryptographie à l'aide d'automates cellulaires élémentaires était de faible qualité. Une piste pour augmenter la qualité de ces suites est l'utilisation d'automates cellulaires non-uniformes basés sur plusieurs règles différentes [58, 57]. Nous avons cependant remarqué que peu d'études théoriques avaient été menées dans le cas des automates cellulaires non-uniformes. Nous avons, dans un premier temps, utilisé notre formalisme pour étudier la stabilité structurelle des automates cellulaires à l'aide d'une classe intermédiaire de modèles. Nous nous sommes par la suite intéressés à une plus grande classe d'automates cellulaires non-uniformes qui englobe la plupart des modèles déterministes trouvés dans la littérature. Nous les avons étudiés en tant que systèmes dynamiques à part entière et avons tenté de fournir un cadre théorique pour ces modèles.

Cette thèse s'articule en cinq chapitres. Nous détaillons ici le contenu de chacun d'entre eux.

Le Chapitre I commence par une brève introduction aux systèmes dynamiques et plus particulièrement aux systèmes dynamiques discrets. L'ensemble des propriétés que nous étudierons par la suite y sont présentées. Vient ensuite la définition des automates cellulaires uniformes (nous nous restreignons à la dimension 1 dans la thèse). Certaines propositions classiques sur les automates cellulaires y sont rappelées, elles seront utilisées

dans les chapitres suivants pour illustrer les points communs et les différences avec les variantes que nous introduirons.

Le Chapitre II introduit le formalisme pour les automates cellulaires non-uniformes. Un modèle très général est défini (les ν -CA), il ne préserve ni l'uniformité ni la localité. Trois variantes sont également définies : les $d\nu$ -CA, les $p\nu$ -CA et les $r\nu$ -CA. Les $d\nu$ -CA correspondent à des automates cellulaires où l'uniformité n'est mise en défaut que sur un nombre fini de sites. Les règles appliquées aux $p\nu$ -CA se répètent de manière spatialement périodique en dehors d'une zone perturbée. Il n'existe pas de restriction quant aux possibilités d'application des règles pour les $r\nu$ -CA mais, à la différence des ν -CA, ils préservent le principe de localité. Nous montrons que ces quatre classes de systèmes dynamiques étendent celle des automates cellulaires classiques et qu'elles forment une hiérarchie en fonction de leur structure. Nous donnons un ensemble de propositions qui illustrent les différences avec le modèle classique.

Le Chapitre III traite de la stabilité structurelle des automates cellulaires. Un modèle de perturbation correspond alors à un $d\nu$ -CA dont la règle prédominante est la même que celle de l'automate cellulaire que nous étudions. Nous nous intéressons tout d'abord à la surjectivité et à l'injectivité. Nous montrons qu'aucune de ces propriétés n'est structurellement stable mais qu'elles ne peuvent apparaître à l'aide de perturbations : un modèle de perturbation ne peut être surjectif (ou injectif) sans que le modèle initial ne le soit. Nous montrons alors que, sur la classe des $d\nu$ -CA, l'injectivité est encore équivalente à la réversibilité (comme dans le cas uniforme).

Nous étudions ensuite des propriétés dynamiques relatives à la stabilité (classique) du modèle : la sensibilité, la presque équicontinuité et l'équicontinuité. Nous montrons sur deux contre-exemples que ni la sensibilité, ni la presque équicontinuité ne sont structurellement stables. La principale conséquence est que les mots bloquants, qui sont connus pour caractériser la presque équicontinuité, peuvent être affectés par des perturbations lointaines. Ce résultat est contre-intuitif, les mots bloquants semblaient en effet être une notion locale. Nous avons alors développé une généralisation : les mots fortement bloquants. Nous montrons alors grâce à ces mots que l'équicontinuité est structurellement stable. Ces résultats ont été publiés dans [1, 5].

Le Chapitre IV reprend et approfondit les résultats de [4, 2]. Nous nous plaçons dans le cadre des $r\nu$ -CA. Etant donné un ensemble de règles locales, nous cherchons à déterminer comment celles-ci peuvent interagir pour produire certaines propriétés. On associe alors à une propriété un langage qui correspond à l'ensemble des façons de distribuer les règles pour qu'elle soit vérifiée. Une fois le langage connu, il peut être utilisé pour engendrer des $r\nu$ -CA qui satisferont cette propriété ou pour vérifier qu'un $r\nu$ -CA vérifie bien cette propriété. Nous avons étudié les propriétés de conservation du

nombre, de surjectivité et d'injectivité. Nous nous sommes également intéressés à l'équicontinuité dans le cas où l'on se restreint à des règles additives. Nous montrons que les langages produits sont de complexité croissante avec les propriétés considérées.

La conservation du nombre est une condition souvent requise dans les modèles qui visent à reproduire des phénomènes naturels. Elle correspond à la préservation d'une certaine quantité tout au long de la simulation (énergie, masse, quantité de matière...). Nous montrons que le langage associé à cette propriété forme un espace de décalage de type fini et nous donnons une formule qui permet de déterminer l'ensemble des facteurs interdits.

Lors de l'étude de la surjectivité et de l'injectivité, nous étendons des résultats obtenus sur les automates cellulaires classiques à l'aide de graphe de De Bruijn [61]. Nous montrons alors que le langage associé à la surjectivité est un espace de décalage sofique tandis que le langage associé à l'injectivité est ζ -rationnel. Nous donnons une manière effective de construire les automates qui reconnaissent l'ensemble des mots interdits dans le cas de la surjectivité et le langage lui-même dans le cas de l'injectivité.

Pour l'étude des propriétés dynamiques relatives à la stabilité, nous nous restreignons aux règles additives. Nous savons en effet qu'étant donnée une règle quelconque, il est indécidable de savoir si l'automate cellulaire associé est presque équicontinu ou sensible. Il n'est donc pas possible d'avoir une caractérisation simple des langages associés à ces propriétés dans le cas général. Par contre, dans le cas additif, ces propriétés sont décidables [44]. Nous montrons, dans un premier temps, qu'un ν -CA additif est soit sensible, soit équicontinu. Nous développons par la suite une notion de «murs» pour les ν -CA additifs ; ce sont des règles qui, une fois combinées, bloquent la propagation d'un signal durant la dynamique. Nous montrons alors que l'équicontinuité est caractérisée par la présence d'une infinité de murs dans la façon de distribuer les règles. Nous montrons enfin que, lorsque les interactions dans le ν -CA sont faibles (rayon 1), il est possible de caractériser simplement les murs et que le langage associé à l'équicontinuité est ζ -rationnel.

Le Chapitre V correspond à un travail effectué pour caractériser plus finement les langages ζ -rationnels utilisés au Chapitre IV et a fait l'objet d'une publication [3]. Plus précisément, nous cherchons à établir une hiérarchie des langages ζ -rationnels afin de pouvoir distinguer des langages de complexités différentes. Nous nous intéressons ici aux langages ω -rationnels qui servent à définir les langages ζ -rationnels. Nous étudions les classes de langages engendrées par différents modes d'acceptation en fonction de la structure de l'automate utilisé pour la reconnaissance. Nous nous inscrivons ainsi dans la lignée de [32, 41, 60, 48, 43]. Nous avons poursuivi l'étude de [48] en généralisant la structure des automates considérés, ce qui a permis de définir quatre nouvelles classes qui se situent à un niveau intermédiaire

dans la hiérarchie borélienne. Nous avons entamé l'étude de deux nouveaux modes d'acceptation inspirés par [43]. Les classes correspondantes semblent plus difficiles à caractériser. Nous sommes tout de même parvenus à montrer que certaines d'entre elles coïncident avec d'autres classes connues de la hiérarchie.

Nous avons proposé dans cette thèse une nouvelle façon de modéliser et d'étudier les perturbations dans un automate cellulaire. Nous avons réussi à montrer qu'un automate cellulaire équicontinu restait équicontinu en présence de perturbations. La généralité du cadre dans lequel nous nous sommes placés ne nous a pas permis de fournir d'autres résultats positifs quant à la stabilité structurelle des automates cellulaires. Plusieurs pistes sont possibles pour poursuivre cette étude. Nous pourrions nous restreindre à certaines classes d'automates cellulaires (additifs, élémentaires. . .) et voir si leur réponse aux perturbations diffère du cas général. Nous pouvons également restreindre la forme des règles que nous utilisons pour les perturbations. Enfin, il pourrait s'avérer extrêmement intéressant (mais également complexe) de combiner plusieurs formes de perturbations entre elles (non-uniformité, mise à jour asynchrone, perturbation du réseau. . .).

Nous avons, dans un deuxième temps, utilisé le formalisme introduit pour étudier un modèle général d'automates cellulaires non-uniformes. Nous avons défini des langages qui correspondent aux façons de distribuer des règles pour obtenir certaines propriétés et avons réussi à les caractériser. Ceci présente un grand intérêt pour la génération ou la vérification de modèles. Cependant, l'étude des rv -CA n'en est encore qu'à ses prémises, de nombreuses questions demeurent ouvertes. Par exemple, est-ce que la dichotomie entre sensibilité aux conditions initiales et presque équicontinuité est toujours vraie pour les rv -CA ? Il serait également souhaitable d'approfondir les liens entre une propriété et le langage qui lui est associé. Intuitivement une propriété est d'autant plus complexe que les langages qui lui sont associés le sont eux-mêmes. C'est dans cette optique que nous avons mené une première étude pour construire une hiérarchie des langages ζ -rationnels. Dans la dernière section du Chapitre IV, nous nous sommes restreints à des interactions à très courte distance lors de la caractérisation du langage associé à l'équicontinuité. Cette caractérisation a été possible du fait qu'un signal se propage à vitesse constante ou disparaît. Dans le cas d'interactions à plus longue portée (rayon > 1), cette vitesse peut se voir modifiée. Nous ne savons pas si le langage associé reste ζ -rationnel ou est plus complexe. Nous avons tenté une approche par groupage pour se ramener au cas des interactions de rayon 1 mais la méthode classique nous fait alors perdre l'additivité des règles. Nous avons réussi à produire un modèle équivalent où les règles sont de rayon 1 et qui préserve l'additivité. Cependant nous nous trouvons alors sur un anneau fini non commutatif et nous sortons du cadre de l'étude précédente. Enfin, de nombreuses autres propriétés dynamiques classiques n'ont pas encore été

étudiées. Il est fort probable que ces propriétés qui paraissent plus difficiles à caractériser engendrent des langages dont la complexité dépasse celle des langages ζ -rationnels.

Le Chapitre V offre des pistes intéressantes dans le cadre de la théorie des ζ -langages. Les hiérarchiser s'avère plus ardu qu'on ne pourrait l'imaginer, particulièrement du fait de l'absence de topologie naturelle. Pour comprendre et tenter de définir une notion correcte de complexité sur ces langages, nous nous sommes intéressés aux langages ω -rationnels. Nous avons réussi à augmenter la granularité de la hiérarchie dans ce cas. De plus, nous avons trouvé un candidat potentiel (la classe $\text{CDFA}(\text{fin}, =)$) qui se situe très haut dans la hiérarchie, elle pourrait être un prédécesseur direct de l'ensemble des langages ω -rationnels. Si tel s'avère être le cas, cela permettrait de mieux appréhender une partie méconnue de la hiérarchie. Enfin, il est naturel de vouloir poursuivre l'étude des classes nouvellement définies en cherchant à déterminer leurs propriétés de clôture.

Chapitre I

Systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques forment un ensemble de modèles mathématiques formels qui visent à décrire l'évolution d'un paramètre en fonctions de certaines règles. Un tel système est caractérisé par l'état dans lequel il se trouve à un instant donné et par sa loi d'évolution. La dynamique du système correspond alors à l'ensemble des états qui apparaissent au cours du temps en suivant la loi d'évolution. On distingue plusieurs types de systèmes dynamiques en fonction de l'espace dans lequel le système prend ses états (espace métrique, espace topologique, variété différentielle, espace mesurable...), de l'ensemble des temps considérés (temps continu, temps discret) et de la forme de sa loi d'évolution (système différentiel, itération d'un processus, loi stochastique...).

Ces systèmes apparaissent naturellement dans de nombreux domaines scientifiques : physique, biologie, informatique, sciences humaines... Usuellement, ils mettent en jeu un grand nombre d'éléments en interaction. Le but n'est pas alors de déterminer l'évolution exacte de chaque élément mais d'étudier les propriétés globales du système au cours du temps et, notamment, son comportement asymptotique.

Un exemple très connu de système dynamique est celui des équations du mouvement de Newton [53] et plus particulièrement du problème à N corps. Etant donné un certain nombre de corps dont on connaît la masse ainsi que la position et la vitesse initiales, il est possible de déterminer le mouvement de ces objets au cours du temps à l'aide d'un système d'équations différentielles. Cet exemple illustre plusieurs des problématiques rencontrées lors de l'étude des systèmes dynamiques : solvabilité, prédictibilité, stabilité, influence de la précision sur la connaissance de l'état du système. Ainsi pour le problème à deux corps, il est possible d'obtenir une formule close qui décrit le mouvement des deux objets. Dans le cas général, aucune formule n'a été trouvée et l'étude de la stabilité a été un des grands sujets de recherche de Poincaré [56].

Dans la Section I.1, nous introduisons le formalisme utilisé pour les sys-

tèmes dynamiques déterministes sur un espace métrique. Nous donnons des notions générales ainsi que quelques exemples classiques. Nous nous focalisons ensuite sur les systèmes dynamiques discrets.

Dans la Section I.2, nous définissons un système dynamique discret particulier : les automates cellulaires. Nous donnons par la suite un ensemble de propriétés classiques de ces modèles. Ces propriétés seront comparées dans les chapitres suivants avec celles de modèles proches des automates cellulaires.

I.1 Présentation générale

Cette partie introduit les définitions et notions générales sur les systèmes dynamiques qui seront utilisées par la suite. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [38]. Nous illustrons les notions introduites au fur et à mesure par des exemples de systèmes dynamiques classiques.

Définition I.1. Un **système dynamique** est un triplet (X, T, F) où X est un ensemble, T un monoïde noté additivement et $F : X \times T \rightarrow X$ une fonction telle que

1. $\forall x \in X, F(x, 0) = x$
2. $\forall x \in X, \forall s, t \in T, F(F(x, s), t) = F(x, s + t)$.

Pour un système dynamique (X, T, F) , on utilise habituellement la notation $F^t(x)$ pour $F(x, t)$. Les conditions pour être un système dynamique se réécrivent alors $F^0 = id$ et $F^s \circ F^t = F^{s+t}$.

L'ensemble T est l'**ensemble des temps**, il s'agit usuellement d'un des ensembles \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} . L'ensemble X est l'**espace des phases**, c'est-à-dire l'ensemble des états possibles du système. Dans les cas classiques, X est muni d'une certaine structure (espace topologique, variété différentielle, variété analytique complexe, espace mesuré...) et les fonctions F^t respectent cette structure (homéomorphisme, difféomorphisme, fonctions holomorphes, fonctions préservant la mesure...).

Nous supposons ici que T est bien un des ensembles \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} , X est un espace métrique muni d'une distance d et F est une fonction continue dans la topologie induite par la distance d . On notera alors $B_r(x)$ la **boule ouverte** de rayon $r > 0$ et de centre $x \in X$:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \text{ .}$$

Les systèmes dynamiques les plus courants sont issus d'équations différentielles. Une **équation différentielle autonome** du premier ordre sous forme normalisée est de la forme

$$f' = \phi(f) \tag{E}$$

où $\phi : U \rightarrow B$ est une fonction continue avec U ouvert d'un espace de Banach B et f est la fonction inconnue. Une solution de (E) est une fonction $f : I \rightarrow B$ de classe C^1 où I est un intervalle de \mathbb{R} tel que

$$\forall t \in I, f'(t) = \phi(f(t)) .$$

Une condition initiale est un couple $(x_0, t_0) \in U \times \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy associé à cette condition initiale est la recherche d'une solution f telle que $f(t_0) = x_0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que si ϕ est localement lipschitzienne alors il existe une unique solution f définie sur un intervalle I maximal (au sens de l'inclusion) telle que $f(t_0) = x_0$.

Dans les cas usuels de la physique, cette condition est vérifiée et on a de plus $I = \mathbb{R}$. On définit alors un système dynamique associé à l'équation différentielle (E) par le triplet (U, \mathbb{R}, F) tel que

$$\forall x \in U, \forall t \in \mathbb{R}, F(x, t) = F_x(t)$$

où F_x est la solution maximale de (E) associée à la condition initiale $(x, 0)$.

Proposition I.2. *La fonction F ainsi définie est un système dynamique.*

Démonstration. Nous allons montrer que les deux conditions de la Définition I.1 sont vérifiées.

1. Par définition de F , $\forall x \in U, F(x, 0) = F_x(0) = x$.
2. Soient $x \in U$ et $s \in \mathbb{R}$. Notons F_1 et F_2 les fonctions définies par

$$\begin{array}{ll} F_1 : \mathbb{R} & \rightarrow U \\ t & \rightarrow F(F(x, s), t) \end{array} \quad \begin{array}{ll} F_2 : \mathbb{R} & \rightarrow U \\ t & \rightarrow F(x, s + t) \end{array} .$$

F_1 et F_2 sont deux solutions maximales de (E), de plus

$$F_1(0) = F(F(x, s), 0) = F(x, s) = F_2(0) .$$

Par unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy, on en déduit que $F_1 = F_2$ et on a bien

$$\forall x \in U, \forall s, t \in \mathbb{R}, F(F(x, s), t) = F(x, s + t) .$$

□

Exemple I.3 (Equation de Verhulst). L'équation de Verhulst [65] est une équation différentielle qui modélise l'évolution d'une population dans un environnement à ressources limitées. La croissance de la population est proportionnelle à la population elle-même ainsi qu'à la quantité de ressources disponibles. L'équation s'écrit :

$$f' = rf \left(1 - \frac{f}{K} \right)$$

où r et K sont deux paramètres : le taux de croissance et la capacité d'accueil de l'environnement. La solution de l'équation associée à la condition initiale $(x_0, 0)$ est la fonction, dite logistique,

$$f : t \rightarrow \frac{x_0 e^{rt}}{1 + \frac{x_0}{K}(e^{rt} - 1)} .$$

L'allure de cette fonction pour différentes valeurs du paramètre K (et r fixé) est donnée Figure I.1.

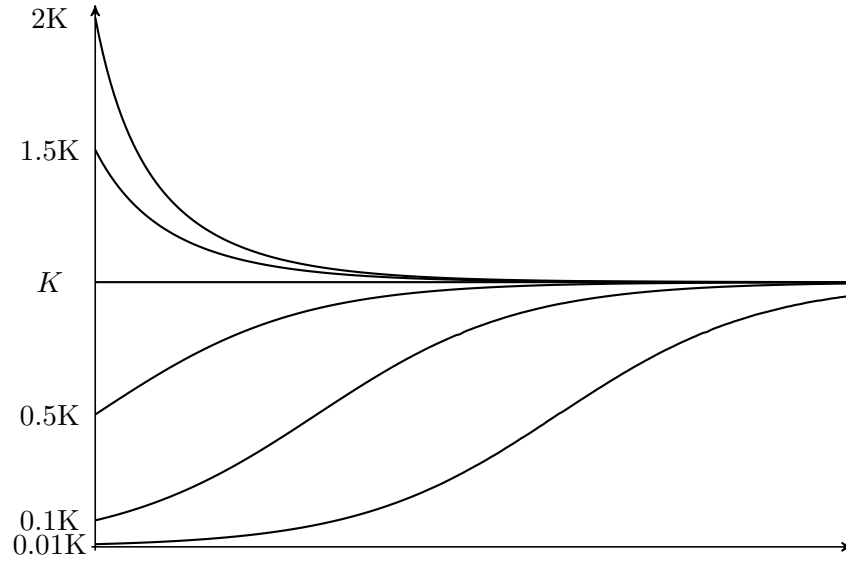


FIGURE I.1 – Solutions de l'équation de Verhulst.

Définition I.4. Soit (X, T, F) un système dynamique.

- Un point $x \in X$ est un **point fixe** si

$$\forall t \in T, F^t(x) = x .$$

- Un point fixe $x \in X$ est **stable** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \forall t \in T, F^t(y) \in B_\varepsilon(x) .$$

- Un point fixe $x \in X$ est **attractif** si

$$\exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \lim_{t \rightarrow \infty} d(F^t(y), x) = 0 .$$

Ainsi, le système dynamique induit par l'équation de Verhulst admet deux points fixes : 0 et K . Le point fixe 0 n'est pas stable alors que le point fixe K est attractif.

Un système dynamique (X, T, F) est **discret** si T est discret (*i.e.* $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$). Ces systèmes sont également appelés **systèmes itératifs**. En effet un tel système est entièrement déterminé par une fonction continue $F : X \rightarrow X$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, F^n = \underbrace{F^1 \circ F^1 \circ \dots \circ F^1}_{n \text{ fois}} .$$

Si $T = \mathbb{Z}$, il suit de la Définition I.1 que F^1 est un homéomorphisme d'inverse F^{-1} et les fonctions F^{-n} se déduisent de l'inverse de F^1 . Tout le système dynamique se calcule par l'itération successive de la fonction F^1 (et éventuellement de son inverse). Dans ce cas, on peut simplifier la définition.

Définition I.5. Un **système dynamique discret** est un couple (X, F) où X est un espace métrique et $F : X \rightarrow X$ une fonction continue pour la topologie induite par la métrique.

Ces systèmes sont très communs. Il suffit de connaître la fonction qui permet de passer d'un état au suivant pour définir la totalité de la dynamique. De plus, l'intérêt pour les systèmes dynamiques discrets s'est grandement accru suite aux travaux de Poincaré [56] qui permettent d'établir des liens entre systèmes dynamiques continus (notamment ceux induits par une équation différentielle) et systèmes dynamiques discrets.

Exemple I.6 (Système de doublement de l'angle). Le système de doublement de l'angle est le système dynamique discret (\mathbb{T}, D) où $\mathbb{T} = [0, 1[$ muni de la distance d tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{T}, d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$$

et D est la fonction telle que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{T}, D(x) &= 2x \pmod{1} \\ &= \begin{cases} 2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} . \end{aligned}$$

L'ensemble \mathbb{T} muni de la distance d peut être assimilé au cercle unité. Le point x de \mathbb{T} est identifié au point du plan d'affixe $e^{2i\pi x}$ et la distance entre deux points x et y est la longueur du plus petit arc reliant les deux points d'affixes $e^{2i\pi x}$ et $e^{2i\pi y}$ divisée par 2π . L'application de D sur x revient à doubler l'argument du point correspondant.

Les systèmes dynamiques discrets sont aussi utilisés pour approcher des systèmes dynamiques en temps continu. Par exemple, pour l'équation de Verhulst

$$f' = rf \left(1 - \frac{f}{K} \right) ,$$

on obtient en la discrétisant

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\varepsilon} = ru_n \left(1 - \frac{u_n}{K}\right)$$

où $\varepsilon > 0$ est un pas de temps et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de la suite $(f(n\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \varepsilon r u_n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon r} - \frac{u_n}{K}\right) \\ &= (1 + \varepsilon r) u_n \left(1 - \frac{\varepsilon r u_n}{K(1 + \varepsilon r)}\right) \end{aligned}$$

et en posant $\mu = 1 + \varepsilon r$, $v_n = \frac{\varepsilon r u_n}{K(1 + \varepsilon r)}$ et $F : x \rightarrow \mu x(1 - x)$, on obtient

$$v_{n+1} = F(v_n) .$$

Exemple I.7 (Suite logistique). Une suite logistique est un système dynamique discret $([0, 1], Q_\mu)$ où $\mu \in [0, 4]$ et $Q_\mu(x) = \mu x(1 - x)$.

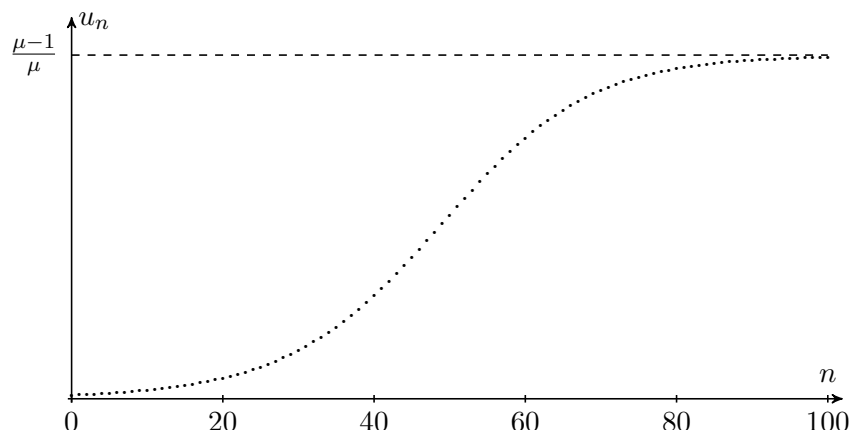


FIGURE I.2 – Suite logistique pour $\mu = 1.1$.

Pour des valeurs de μ dans l'intervalle $]1, 2]$ (donc des pas de temps ε suffisamment petits), la suite logistique est effectivement une bonne approximation de la solution de l'équation de Verhulst associée (Figure I.2). Par contre, pour des valeurs en dehors de cet intervalle, la dynamique peut grandement varier.

Définition I.8. Soit (X, F) un système dynamique discret.

- La **trajectoire** d'un point $x \in X$ est la suite $(F^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
- L'**orbite** d'un point $x \in X$ est l'ensemble $\{F^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

- Un point $x \in X$ est **périodique** s'il existe $p > 0$ tel que $F^p(x) = x$. L'entier p est alors appelé une **période** de x .
- Un point $x \in X$ est **ultimement périodique** s'il existe $q \geq 0$ tel que $F^q(x)$ est périodique. L'entier q est appelé une **prépériode** de x .

Proposition I.9. *Pour le système (\mathbb{T}, D) tout rationnel $x = \frac{p}{q}$ ($q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p < q$) est ultimement périodique ; de plus si q est impair, x est périodique. Réciproquement si x est un point ultimement périodique alors x est rationnel.*

Démonstration. Pour tout entier n , $D^n(x) = \frac{2^n p \pmod{q}}{q}$. Il existe $k < k' \in \mathbb{N}$ tels que $2^k p \pmod{q} = 2^{k'} p \pmod{q}$ et $D^k(x) = D^{k'}(x)$. Le point x est ultimement périodique de prépériode k et de période $k' - k$.

Si q est impair alors la multiplication par 2 modulo q est inversible ce qui implique la périodicité.

Si x est un point ultimement périodique, il existe des entiers p, q tels que $p > 0$, $q \geq 0$ et $D^q(x) = D^{q+p}(x)$. Il existe donc un entier k tel que $2^q x + k = 2^{q+p} x$ et $x = \frac{k}{2^q(2^p - 1)} \in \mathbb{Q}$. \square

Définition I.10. Soit (X, F) un système dynamique discret.

- Le système (X, F) est **transitif** si, pour tous ouverts non vides U et V , il existe un entier $n \geq 0$ tel que

$$F^n(U) \cap V \neq \emptyset .$$

- Un point $x \in X$ est un **point d'équicontinuité** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \forall n \in \mathbb{N}, d(F^n(x), F^n(y)) < \varepsilon .$$

- Le système (X, F) est **équicontinu** si tous les points de X sont des points d'équicontinuité du système.
- Le système (X, F) est **presque-équicontinu** si l'ensemble des points d'équicontinuité du système est résiduel.¹
- Le système (X, F) est **ultimement périodique** s'il existe des entiers $q \geq 0$ et $p > 0$ tels que $F^{q+p} = F^q$.
- Le système (X, F) est **périodique** s'il existe $p > 0$ tel que $F^p = F$.
- Le système (X, F) est **sensible** s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta(x), \exists n \in \mathbb{N}, d(F^n(x), F^n(y)) \geq \varepsilon .$$

La constante ε est appelée **constante de sensibilité** du système.

1. Un ensemble est **résiduel** s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses. Les ensembles résiduels d'un espace de Baire (donc par exemple de tout espace métrique complet) sont denses.

- Le système (X, F) est **expansif** s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists n \in \mathbb{N}, d(F^n(x), F^n(y)) \geq \varepsilon .$$

La constante ε est appelée **constante d'expansivité** du système.

Remarque I.11. Dans le cas des espaces métriques où nous nous plaçons, on trouve parfois comme définition de la transitivité l'existence d'un point $x \in X$ dont l'orbite est dense. Dans ce cadre, les deux définitions sont équivalentes ; elles ne le sont pas dans le cas général.

Soient $x \in \mathbb{T}$ et $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la suite des chiffres d'une écriture binaire de x , $x = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{x_i}{2^i}$. Alors $D(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{x_{i+1}}{2^i}$ et $(x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des chiffres d'une écriture binaire de $D(x)$. Considérons maintenant l'élément x de \mathbb{T} tel que les chiffres en écriture binaire de x sont la concaténation par ordre hiérarchique de toutes les suites binaires finies :

$$x = 0.0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111 \dots$$

Cette suite est connue sous le nom de **suite de Champernowne**.

Soit $y \in \mathbb{T}$. Pour tout entier n , les n premiers chiffres d'une écriture binaire de y se retrouvent dans l'écriture binaire de x et il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que les n premiers chiffres d'une écriture binaire de $D^m(x)$ sont les mêmes que ceux de y . En ce cas, $d(D^m(x), y) \leq 2^{-n-1}$. Ce qui prouve que l'orbite de x est dense dans \mathbb{T} . Le système (\mathbb{T}, D) est transitif.

Soient $y \in \mathbb{T}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $z = y + 2^{-n} \pmod{1}$. On a $d(y, z) = 2^{-n}$ et $d(D^{n-1}(y), D^{n-1}(z)) = \frac{1}{2}$. Le système (\mathbb{T}, D) est sensible de constante de sensibilité $\frac{1}{2}$.

Soit $\mu \in [0, 1]$. La fonction Q_μ est dérivable sur $[0, 1]$ de dérivée

$$Q'_\mu : x \rightarrow \mu(1 - 2x) .$$

Donc $|Q'_\mu| \leq \mu \leq 1$ et Q_μ est 1-lipchitzienne :

$$\forall x, y \in [0, 1], d(F(x), F(y)) \leq d(x, y)$$

et par récurrence

$$\forall x, y \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, d(F^n(x), F^n(y)) \leq d(x, y) .$$

Le système $([0, 1], Q_\mu)$ est équicontinu.

Définition I.12.

- Un **morphisme** π entre deux systèmes dynamiques discrets (X, F) et (Y, G) est une fonction continue $\pi : X \rightarrow Y$ telle que $\pi \circ F = G \circ \pi$.
- Si π est un homéomorphisme, on dit que les systèmes (X, F) et (Y, G) sont **topologiquement conjugués**.

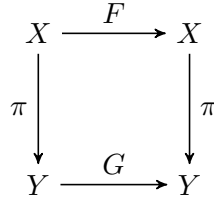


FIGURE I.3 – Diagramme commutatif d'un morphisme.

- Si π est surjective, on dit que (Y, G) est un **facteur** de (X, F) ou que (X, F) est une **extension** de (Y, G) .
- Si π est injective, on dit que (X, F) est un **sous-système** de (Y, G) .

Il est usuel de présenter de tels morphismes par des diagrammes commutatifs (Figure I.3).

Exemple I.13. Considérons l'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites sur $\{0, 1\}$ muni de la distance d définie par

$$\forall x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} .$$

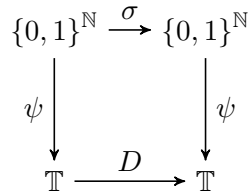
Le **full shift** (sur un ensemble fini A) est le système dynamique discret $(A^{\mathbb{N}}, \sigma)$ où $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est la fonction telle que

$$\forall x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \forall i \in \mathbb{N}, \sigma(x)_i = x_{i+1} .$$

Posons $\psi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{T}$ la fonction telle que

$$\forall x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \psi(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x_i}{2^{i+1}} .$$

Alors ψ est un morphisme surjectif entre $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ et (\mathbb{T}, D) : le diagramme de la Figure I.4 commute. Le système (\mathbb{T}, D) est un facteur du système $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$.

FIGURE I.4 – Diagramme commutatif entre $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ et (\mathbb{T}, D) .

Ces morphismes permettent d'établir une notion de complexité entre systèmes dynamiques. Ainsi, un facteur ne permet pas d'obtenir une dynamique plus complexe que le système d'origine. De même, la dynamique d'un sous-système se retrouve dans la dynamique du système d'arrivée. Enfin, deux systèmes topologiquement conjugués sont identiques à une transformation continue près ; leurs dynamiques sont similaires.

I.2 Automates cellulaires

Dans cette section, nous présentons un ensemble particulier de systèmes dynamiques discrets : les *automates cellulaires*. Les automates cellulaires sont des systèmes symboliques : leur espace des phases est constitué de suites de symboles. L'image d'un élément est déterminée en appliquant à chaque indice une même fonction qui met à jour le symbole à cette position. La nouvelle valeur est calculée en fonction des symboles d'origine de la suite sur un voisinage fini de la position considérée. Ce sont des systèmes dynamiques massivement parallèles, synchrones et locaux.

Définition I.14. Un automate cellulaire (CA) est un triplet (A, r, f) où A est un ensemble fini appelé **alphabet**, r un entier positif et $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ est une fonction appelée **règle locale** de **rayon** r . Cette règle locale induit une **règle globale** $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, F(x)_i = f(x_{[i-r, i+r]}) .$$

Exemple I.15. Le **shift** est l'automate cellulaire $(A, 1, f)$ où

$$\forall x, y, z \in A, f(x, y, z) = z .$$

Sa fonction de transition globale est donc la fonction F telle que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, F(x)_i = x_{i+1} .$$

On identifiera souvent par la suite un automate cellulaire et sa fonction de transition globale.

Un élément $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est appelé une **configuration** de l'automate.

Soit $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un automate cellulaire de règle locale f et de rayon r . On étend la règle locale f en une fonction $f^* : A^* \rightarrow A^*$ sur l'ensemble des mots définie par

$$\forall u \in A^*, f^*(u) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } |u| < 2r + 1 \\ v & \text{sinon} \end{cases}$$

où $|v| = |u| - 2r$ et $\forall i \in [0, |u| - 2r - 1], v_i = f(u_{[i, i+2r]})$. Cette fonction est appelée **règle locale étendue**. On assimile par la suite les fonctions f et f^* (qui coïncident sur A^{2r+1}).

Définition I.16. Pour tout ensemble A , on définit la **distance de Cantor** d sur $A^{\mathbb{Z}}$ par

$$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 2^{-\min(\{i \in \mathbb{N} : x_{[-i, i]} \neq y_{[-i, i]}\})} & \text{sinon} \end{cases} .$$

La topologie induite par la distance de Cantor coïncide avec la topologie prodiscrète sur $A^{\mathbb{Z}}$ (topologie produit induite par la topologie discrète sur A), en particulier l'espace topologique ainsi défini est compact.

Définition I.17. Un **cylindre** est un ensemble $[u]_i$ où $u \in A^+$ et $i \in \mathbb{Z}$ défini par

$$[u]_i := \left\{ x \in A^{\mathbb{Z}} : x_{[i, i+|u|-1]} = u \right\} .$$

Les cylindres constituent une base d'ouverts pour la topologie induite par la distance de Cantor. Ce sont les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés de cette topologie.

Un **segment initial** d'un point $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est le mot $x_{[-n, n]}$ pour un entier $n \geq 0$. Si $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est une fonction où $A^{\mathbb{Z}}$ est muni de la topologie de Cantor, les propriétés topologiques se réécrivent en terme de segments initiaux.

Par exemple, un point $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est un point de continuité de F si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in A^{\mathbb{Z}}, \exists m \in \mathbb{N}, \\ y_{[-m, m]} = x_{[-m, m]} \Rightarrow F(y)_{[-n, n]} = F(x)_{[-n, n]} ,$$

un point x est un point d'équicontinuité de F si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall y \in A^{\mathbb{Z}}, \\ y_{[-m, m]} = x_{[-m, m]} \Rightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N}, F^k(y)_{[-n, n]} = F^k(x)_{[-n, n]} \right) ,$$

F est sensible si

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall y \in A^{\mathbb{Z}}, \exists x \in A^{\mathbb{Z}} \\ y_{[-m, m]} = x_{[-m, m]} \text{ et } \exists k \in \mathbb{N}, F^k(y)_{[-n, n]} \neq F^k(x)_{[-n, n]} .$$

Les automates cellulaires ont été initialement introduits par Von Neumann pour ses travaux sur l'auto-réplication [52]. Leur définition mathématique formelle, qui ouvre la voie à leur étude en tant que systèmes dynamiques discrets particuliers, a été réalisée par Hedlund dans [33]. Il est à l'origine du théorème fondamental de caractérisation topologique des automates cellulaires.

Théorème I.18 (Hedlund [33]). *Une fonction $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est la fonction globale d'un automate cellulaire si et seulement si elle est continue et commute avec le shift ($\sigma \circ F = F \circ \sigma$).*

Ce théorème prouve que si F est la fonction globale d'un automate cellulaire, le système $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ est un système dynamique discret. De plus, si F est un homéomorphisme, sa réciproque est également la fonction globale d'un automate cellulaire.

Il est usuel de représenter la dynamique engendrée par un automate cellulaire $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ à l'aide d'un **diagramme espace-temps**. Chaque élément de A est associé à une couleur, une configuration est alors représentée par une succession de carrés de couleur. Le diagramme espace-temps est la superposition des représentations des configurations $(F^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'une configuration initiale $x \in A^{\mathbb{Z}}$. Comme les configurations ainsi que la dynamique sont infinies, on ne visualise qu'une portion finie des diagrammes espace-temps. Tous les diagrammes espace-temps présentés dans cette thèse le sont avec le temps qui évolue de bas en haut.

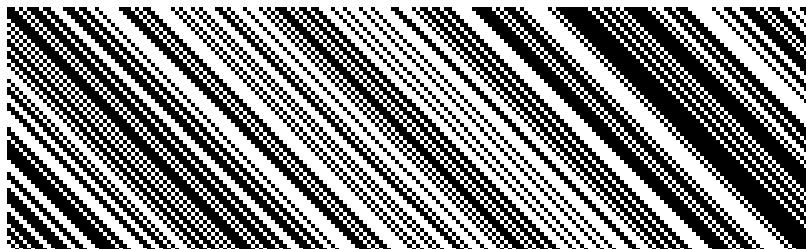


FIGURE I.5 – Diagramme espace-temps du shift sur deux états.

Nous allons maintenant donner plusieurs propriétés classiques des automates cellulaires. Ces propriétés seront utilisées dans les chapitres suivants pour observer leurs points communs et différences avec les systèmes dynamiques que nous introduirons.

Proposition I.19. *Tout automate cellulaire est topologiquement conjugué à un automate cellulaire de rayon 1.*

Démonstration. Si $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire de rayon $r \geq 1$, on pose $\phi : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow (A^r)^{\mathbb{Z}}$ et $g : (A^r)^3 \rightarrow A^r$ les fonctions définies par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, \phi(x)_i = x_{[ir, i(r+1)-1]} \text{ et}$$

$$\forall x, y, z \in A^r, \forall i \in [0, r-1], g(x, y, z)_i = f(x_{[i, r-1]} y z_{[0, i]}) .$$

On note $G : (A^r)^{\mathbb{Z}} \rightarrow (A^r)^{\mathbb{Z}}$ l'automate cellulaire de règle locale g . La fonction ϕ est un homéomorphisme entre $A^{\mathbb{Z}}$ et $(A^r)^{\mathbb{Z}}$ et $\phi \circ F = G \circ \phi$. \square

Définition I.20. Un point $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est **spatialement périodique**, s'il est périodique pour l'automate σ . Une période de x pour σ est appelée **période spatiale**.

Proposition I.21. *Tout point spatialement périodique d'un automate cellulaire $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est ultimement périodique.*

Démonstration. Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$ un point spatialement périodique. Il existe un entier $k > 0$ tel que $\sigma^k(x) = x$. Mais alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$F^n(x) = F^n(\sigma^k(x)) = \sigma^k(F^n(x))$$

et $F^n(x)$ est spatialement périodique de même période spatiale que x . Or, il existe un nombre fini de points spatialement périodiques de période spatiale k ; donc il existe des entiers i et j tels que $F^i(x) = F^j(x)$. \square

Corollaire I.22. *Pour tout automate cellulaire, l'ensemble des points ultimement périodiques est dense dans $A^{\mathbb{Z}}$.*

Proposition I.23 (Hedlund [33]). *Un automate cellulaire est surjectif si et seulement si toute configuration admet un nombre fini de pré-images.*

Proposition I.24. *Soit $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ une fonction continue. F est surjective si et seulement si la pré-image de tout cylindre est non vide.*

Démonstration. Si F est surjective, il est clair que la pré-image de tout cylindre est non vide. Supposons que tout cylindre admette une pré-image non vide. Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$. On pose pour tout entier $n \geq 0$, $Y_n = F^{-1} \left([x_{[-n,n]}]_{-n} \right)$. Par hypothèse, pour tout entier $n \geq 0$, Y_n est non vide et de plus $Y_{n+1} \subseteq Y_n$. Alors par compacité de l'espace, $Y := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ est non vide et par continuité de F , $F(Y) = \{x\}$. Donc x admet une pré-image. \square

Corollaire I.25. *Un automate cellulaire est surjectif si et seulement si sa règle locale étendue est surjective.*

Corollaire I.26. *Dans la topologie de Cantor, tout système dynamique transitif est surjectif.*

Proposition I.27 (Kůrka [37]). *Tout automate cellulaire expansif est transitif.*

Proposition I.28. *Soit $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un automate cellulaire de rayon $r > 0$ non-surjectif.*

1. *Il existe des mots $w \in A^{2r+1}$ et $u, v \in A^+$ tels que $f(wuw) = f(vwv)$. C'est ce que l'on appelle un **diamant** (Fig I.6).*
2. *Il existe un point $x \in A^{\mathbb{Z}}$ qui admet un nombre non dénombrable de pré-images.*

Il y a un corollaire important à cette proposition.

Corollaire I.29. *Tout automate cellulaire injectif est surjectif et donc bijectif.*

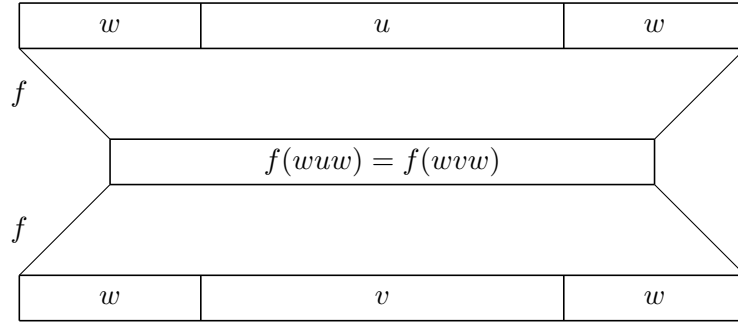


FIGURE I.6 – Un diamant.

Il existe un théorème plus précis quant au lien entre injectivité et surjectivité.

Soient $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un automate cellulaire de rayon r et de règle locale f et $\alpha \in A$. On dit que α est un **état quiescent** pour F si $f(\alpha^{2r+1}) = \alpha$. On appelle **configuration α -finie**, toute configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$ telle que l'ensemble $\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq \alpha\}$ est fini. Si F admet α comme état quiescent, l'ensemble des configurations α -finies est stable par F . On note alors $F|_{\alpha}$ la restriction de F aux configurations α -finies, c'est un sous-système de F .

Théorème I.30 (Théorème du jardin d'Eden, Moore [47] et Myhill [51]). *Soit F un automate cellulaire qui admet un état quiescent α , F est surjectif si et seulement si $F|_{\alpha}$ est injectif.*

Il est à noter que l'existence d'un état quiescent n'est pas une hypothèse contraignante. En effet, pour tout $\alpha \in A$, les images des configurations α -finies sont des configurations β -finies pour un certain $\beta \in A$. Et donc en notant $n = \text{Card}(A)$, F^n est un automate cellulaire qui admet un état quiescent. De plus F^n est surjectif si et seulement si F est surjectif.

Définition I.31. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, un mot u est dit **k -bloquant** pour un automate cellulaire $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ si $|u| \geq k$ et s'il existe $i \in [0, |u| - k]$ tel que

$$\forall x, y \in [u]_0, \forall n \in \mathbb{N}, F^n(x)_{[i, i+k]} = F^n(y)_{[i, i+k]} .$$

De façon informelle, un mot bloquant détermine à lui seul tout une colonne de la dynamique (on parle de colonne de la dynamique par analogie avec le diagramme espace-temps).

Exemple I.32. L'automate cellulaire «majorité» est défini sur l'alphabet $\{0, 1\}$ par la règle locale f de rayon 1 telle que

$$\forall x, y, z \in \{0, 1\}, f(x, y, z) = \left\lfloor \frac{x + y + z}{2} \right\rfloor .$$

Pour cet automate, les mots 00 et 11 sont 2-bloquants, ce sont en fait des motifs stables au cours du temps.

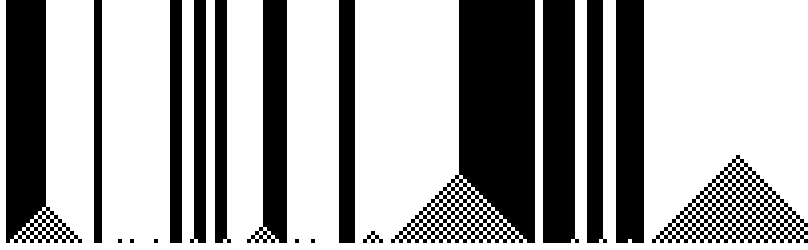


FIGURE I.7 – Diagramme espace-temps de l'automate «majorité».

Les mots bloquants sont fortement liés à la dynamique des automates cellulaires comme le montrent les deux propositions suivantes.

Proposition I.33 (Blanchard et Tisseur [11]). *Soit $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un automate cellulaire de rayon $r > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *F n'est pas sensible.*
2. *F admet un mot r -bloquant.*
3. *F est presque équicontinu.*

Proposition I.34 (Kůrka [37]). *Soit $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un automate cellulaire de rayon $r > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *F est équicontinu.*
2. *Il existe $k > 0$ tel que tout mot de A^{2k+1} est r -bloquant.*
3. *F est ultimement périodique.*

Chapitre II

Automates cellulaires non-uniformes

II.1 Définition et premières propriétés

Après avoir introduit les systèmes dynamiques discrets puis les automates cellulaires dans le Chapitre I, nous allons présenter dans ce chapitre un modèle d'automates cellulaires non-uniformes. Comme son nom l'indique, il s'agit d'une variante des automates cellulaires. Une des principales caractéristiques du modèle usuel est l'uniformité : à toute position une même règle locale est appliquée. Il est parfois souhaitable de s'affranchir de cette contrainte pour, par exemple, modéliser des effets localisés ou un changement de milieu. Un tel modèle a déjà été utilisés dans de nombreux domaines : modélisation de réactions chimiques ou biologiques [35], évolution de populations [29], génération de nombres pseudo-aléatoires [15], cryptographie [27].

Egalement connu sous le nom d'automates cellulaires hybrides, ce nouveau modèle est souvent étudié dans des cas particuliers. Notre objectif est de fournir un cadre général au modèle et d'en dégager des propriétés globales.

Définition II.1. Un automate cellulaire non-uniforme (ou ν -CA) est un couple $(A, (\theta_i, r_i)_{i \in \mathbb{Z}})$ où A est un ensemble fini appelé **alphabet** et où, pour tout entier i , r_i est un entier positif et $\theta_i : A^{2r_i+1} \rightarrow A$ est une **règle locale** de **rayon** r_i . Cette structure induit une **règle globale** $H_\theta : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H_\theta(x)_i = \theta_i(x_{[i-r_i, i+r_i]}) \ .$$

Tout comme pour les automates cellulaires, on identifiera un ν -CA et sa fonction de transition globale. Un élément $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est appelé **configuration** de l'automate et la suite θ est appelée **distribution** (des règles locales) de l'automate. Etant donnée une distribution θ , on note H_θ le ν -CA induit par θ et on dit que θ **engendre** H_θ .

La différence entre automates cellulaires et ν -CA vient donc de la possibilité d'avoir des règles locales différentes selon les positions.

Proposition II.2. *Une fonction $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est la règle globale d'un ν -CA si et seulement si H est continue (dans la topologie de Cantor).*

Démonstration. Soit $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$.

1. Supposons que H soit un ν -CA, alors il existe une distribution θ telle que $H = H_{\theta}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, on note $r = \max(\{r_i : i \in [-k, k]\})$ où r_i est le rayon de la règle θ_i . Alors pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$, $H(x)_{[-k, k]}$ ne dépend que de $x_{[-k-r, k+r]}$ et H est continue.
2. Supposons que H soit continue. D'après le théorème de Heine, toute fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue, donc H est uniformément continue. Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, x_{[-m, m]} = y_{[-m, m]} \Rightarrow H(x)_{[-n, n]} = H(y)_{[-n, n]} .$$

On pose $r = m + n$, on peut alors définir deux fonctions $\theta_n : A^{2r+1} \rightarrow A^{2r+1}$ et $\theta_{-n} : A^{2r+1} \rightarrow A^{2r+1}$ telles que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, F(x)_n = \theta_n(x_{[n-r, n+r]}) \text{ et } F(x)_{-n} = \theta_{-n}(x_{[-n-r, -n+r]}) .$$

On a alors $H = H_{\theta}$ et H est bien un ν -CA. □

Ce théorème indique que toute fonction continue sur $A^{\mathbb{Z}}$ est un ν -CA. Cet ensemble de fonctions est très vaste et elles n'ont, dans le cas général, pas de structure, ce qui rend leur étude difficile. C'est pourquoi nous allons définir plusieurs sous-ensembles de ν -CA qui disposent d'une structure afin d'étudier plus finement leur comportement dans les Chapitres III et IV.

Définition II.3. Soit $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$.

1. H est un **d ν -CA** s'il existe une distribution θ , une règle locale f et un entier $n \geq 0$ tels que $H = H_{\theta}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}, |k| > n \Rightarrow \theta_k = f$.

La fonction f est appelée **règle par défaut** et l'entier n est appelé **seuil de perturbation**. Cette dernière appellation sera explicitée au Chapitre III.

2. H est un **p ν -CA** s'il existe une distribution θ et des entiers $n \geq 0$ et $p > 0$ tels que $H = H_{\theta}$ et $\forall k > n, \theta_k = \theta_{k+p}$ et $\theta_{-k} = \theta_{-k-p}$.

L'entier n est encore une fois appelé **seuil de perturbation** et l'entier p , **période structurelle**.

Si $p = 1$, θ_{n+1} est appelée **règle par défaut droite** et θ_{-n-1} **règle par défaut gauche**.

3. H est un **rv-CA** s'il existe une distribution θ et un entier $r \geq 0$ tels que $H = H_\theta$ et, pour tout entier k , θ_k est une règle locale de rayon r . L'entier r est alors appelé **rayon** de l'automate.

Remarque II.4. Un $d\nu$ -CA (ou un $p\nu$ -CA) admet plusieurs seuils de perturbations, ce sont tous les entiers supérieurs à un seuil de perturbation minimal. Quand on parlera du seuil de perturbation d'un $d\nu$ -CA, ce sera toujours ce seuil minimal.

Il en va de même pour les notions de période (spatiale pour une configuration, temporelle pour une fonction, ou structurelle pour un $p\nu$ -CA). Un de ces objets peut posséder plusieurs périodes, on parle de *la* période pour la plus petite *des* périodes.

Les propositions suivantes présentent une hiérarchie (au sens de l'inclusion) entre ces classes.

Proposition II.5. Soit $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$. La fonction H est un rv -CA si et seulement s'il existe une distribution θ telle que $H = H_\theta$ et $\{\theta_i : i \in \mathbb{Z}\}$ est un ensemble fini.

Démonstration.

1. Si H est un rv -CA de rayon r , il existe une distribution θ telle que $H = H_\theta$ et, pour tout entier i , θ_i est une règle locale de rayon r . Comme le nombre de règles locales de rayon r est fini, l'ensemble $\{\theta_i : i \in \mathbb{Z}\}$ est fini.
2. Soit θ une distribution telle que $H = H_\theta$ et $\{\theta_i : i \in \mathbb{Z}\}$ soit fini. On note r_i le rayon de la règle θ_i et on pose $r = \max(\{r_i : i \in \mathbb{Z}\})$. On définit alors pour tout entier i , la règle $\tilde{\theta}_i$ de rayon r par

$$\forall u \in A^{2r+1}, \tilde{\theta}_i(u) = \theta_i(u_{[r-r_i, r+r_i]}) .$$

On a alors $H_{\tilde{\theta}} = H_\theta$ et H est un rv -CA.

□

Nous introduisons maintenant quelques ν -CA sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$ qui nous serviront à prouver des inclusions strictes entre classes de ν -CA. On définit les automates H_0 , H_1 , H_2 et H_3 sur $A^{\mathbb{Z}}$ par

$$\begin{aligned} \forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, \quad H_0(x)_i &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} , \\ H_1(x)_i &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} , \\ H_2(x)_i &= \begin{cases} 1 & \text{si } |i| \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} , \\ H_3(x)_i &= x_{-i} . \end{aligned}$$

Proposition II.6.

1. H_0 est un $d\nu$ -CA mais pas un CA.
2. H_1 est un $p\nu$ -CA mais pas un $d\nu$ -CA.
3. H_2 est un rv -CA mais pas un $p\nu$ -CA.
4. H_3 est un ν -CA mais pas un rv -CA.

Démonstration. Les automates H_0, H_1, H_2 et H_3 sont clairement des $d\nu$ -CA, $p\nu$ -CA, rv -CA et ν -CA, respectivement.

1. H_0 n'est pas un automate cellulaire car il ne commute pas avec le shift (Théorème I.18).
2. Notons $\underline{0}$ la configuration telle que, pour tout entier i , $\underline{0}_i = 0$. Si H_1 était un $d\nu$ -CA, on aurait pour un entier $n \geq 0$ suffisamment grand $H_1(\underline{0})_n = H_1(\underline{0})_{-n}$.
3. Supposons que H_2 soit un $p\nu$ -CA. Notons n son seuil de perturbation et p sa période structurelle. Soit k un nombre premier plus grand que n , $1 = H_2(\underline{0})_k = H_2(\underline{0})_{k+kp} = 0$, ce qui est absurde.
4. Si θ est une distribution définissant H_3 alors, pour tout entier i , la règle θ_i est au moins de rayon $2|i|$ et H_3 n'est pas un rv -CA.

□

Proposition II.7. *Les classes d'automates – c'est-à-dire, les automates cellulaires, les $d\nu$ -CA, les $p\nu$ -CA, les rv -CA et les ν -CA – définissent une hiérarchie stricte :*

$$CA \subsetneq d\nu\text{-CA} \subsetneq p\nu\text{-CA} \subsetneq rv\text{-CA} \subsetneq \nu\text{-CA} .$$

Démonstration. Les inclusions viennent des définitions ainsi que de la Proposition II.5. Le fait qu'elles soient strictes est donné par la Proposition II.6.

□

Proposition II.8. *Tout rv -CA est topologiquement conjugué à un rv -CA de rayon 1.*

Démonstration. Soit $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un rv -CA de rayon $r > 1$. Soit θ une distribution telle que $H = H_\theta$ et, pour tout entier i , θ_i est de rayon r .

On pose $\phi : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow (A^r)^{\mathbb{Z}}$ et, pour tout entier k , $\tilde{\theta}_k : (A^r)^3 \rightarrow A^r$ les fonctions définies par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, \phi(x)_i = x_{[ir, i(r+1)-1]} \text{ et}$$

$$\forall x, y, z \in A^r, \forall i \in [0, r-1], \tilde{\theta}_k(x, y, z)_i = \theta_{kr+i}(x_{[i, r-1]} y z_{[0, i]}) .$$

La fonction ϕ est un homéomorphisme entre $(H, A^{\mathbb{Z}})$ et $(H_{\tilde{\theta}}, (A^r)^{\mathbb{Z}})$, en effet, on vérifie aisément que $\phi \circ H = H_{\tilde{\theta}} \circ \phi$. □

De façon similaire, on peut prouver les Propositions II.9 et II.10.

Proposition II.9. *Tout $d\nu$ -CA est topologiquement conjugué à un $d\nu$ -CA de rayon 1 et de seuil de perturbation 0.*

Proposition II.10. *Tout $p\nu$ -CA est topologiquement conjugué à un $p\nu$ -CA de rayon 1, de seuil de perturbation 0 et de période structurelle 1.*

Proposition II.11. *Tout $r\nu$ -CA est un sous-système d'un automate cellulaire.*

Démonstration. Soit $H : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un $r\nu$ -CA de rayon r . Soit θ une distribution telle que $H = H_{\theta}$ et, pour tout entier i , θ_i est de rayon r .

On note \mathcal{R} l'ensemble des règles locales de rayon r et on définit une règle locale $f : (A \times \mathcal{R})^{2r+1} \rightarrow A \times \mathcal{R}$ par

$$\forall (u, v) \in (A \times \mathcal{R})^{2r+1}, f(u, v) = (v_r(u), v_r) \quad .$$

On note F l'automate cellulaire de règle locale f et on définit l'homéomorphisme injectif $\phi : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow (A \times \mathcal{R})^{\mathbb{Z}}$ par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, \phi(x)_i = (x_i, \theta_i) \quad .$$

On a alors $\phi \circ H = F \circ \phi$ et H est un sous-système de F . □

En fait, tout $r\nu$ -CA de rayon r est un sous-système de l'automate cellulaire F . Les configurations de F contiennent comme entrée la distribution d'un $r\nu$ -CA : c'est la deuxième composante (qui est invariante au cours de la dynamique).

Cependant, un $r\nu$ -CA a des propriétés et un comportement que l'on ne peut directement déduire de ce que l'on sait de l'automate cellulaire dont il est sous-système. Par exemple, on montre aisément que l'automate F dans la preuve de la Proposition II.11 est presque équicontinu sans être équicontinu et n'est ni surjectif ni injectif. Cependant, l'identité et le shift en sont des sous-systèmes, bijectif et équicontinu pour l'un, sensible pour l'autre.

II.2 Différences entre CA et ν -CA : exemples

Nous donnons maintenant quelques exemples de ν -CA pour lesquels des propriétés classiques des automates cellulaires ne sont pas vérifiées.

Notons H_4 , H_5 et H_6 les ν -CA sur $A = \{0, 1\}$ définis par

$$\begin{aligned} \forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, \quad H_4(x)_i &= \begin{cases} x_i & \text{si } i = 0 \\ x_{i-1} & \text{sinon} \end{cases}, \\ H_5(x)_i &= \begin{cases} x_i & \text{si } i = 0 \\ x_{i-1} & \text{si } i > 0 \\ x_{i+1} & \text{si } i < 0 \end{cases}, \\ H_6(x)_i &= \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ x_{i-1} + x_{i+1} \pmod{2} & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

La proposition suivante montre que le Corollaire I.22 n'est plus valable pour les $d\nu$ -CA. Cela implique aussi que la Proposition I.21 n'est plus vraie alors qu'elle est à la base de preuves classiques sur les automates cellulaires.

Proposition II.12. *L'ensemble des points ultimement périodiques de H_4 n'est pas dense dans $A^{\mathbb{Z}}$.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 0$, $H_4^n([01]_0) \subseteq [0^{n+1}1]_0$. Or, pour tous entiers positifs n et m , $[0^{n+1}1]_0 \cap [0^{m+1}1]_0 = \emptyset$ et donc aucun point de $[01]_0$ ne peut être ultimement périodique. L'ensemble des points ultimement périodiques n'est pas dense dans $A^{\mathbb{Z}}$ pour H_5 . \square

Nous allons maintenant montrer qu'un ν -CA peut avoir un nombre fini de pré-images pour chacun de ses points sans être surjectif. Ainsi, la Proposition I.28 n'est plus vérifiée pour les ν -CA.

Proposition II.13. *Tout point $x \in A^{\mathbb{Z}}$ admet un nombre fini de pré-images par H_4 mais H_4 n'est pas surjectif.*

Démonstration. Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$. Si $x_0 \neq x_1$ alors x n'a pas de pré-image ce qui montre que H_4 n'est pas surjectif. Si $x_0 = x_1$, alors x admet deux pré-images : les configurations y et z telles que

1. $\forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}, y_i = z_i = x_{i+1}$,
2. $y_0 = z_0 = x_0$,
3. $y_{-1} = 0$,
4. $z_{-1} = 1$.

\square

La Proposition II.14 montre qu'un théorème fondamental sur les automates cellulaires, le théorème du Jardin d'Eden, n'est plus vérifié sur les $d\nu$ -CA. Cependant nous montrons que sa version faible (Corollaire I.29) n'est pas vérifiée sur les $p\nu$ -CA alors qu'elle l'est toujours sur les $d\nu$ -CA. Nous montrons à la Proposition III.4 que l'injectivité implique la surjectivité sur les $d\nu$ -CA.

Proposition II.14. *L'automate H_6 restreint aux configurations 0-finies est injectif mais H_6 n'est pas surjectif.*

Démonstration. Soient x et y deux configurations 0-finies qui admettent la même image par H_6 . Supposons par l'absurde que $x \neq y$. Comme les configurations sont 0-finies, il existe $i \in \mathbb{Z}$ maximal tel que $x_i \neq y_i$. Par symétrie du problème, on peut supposer sans perte de généralité que $i \geq 0$. Alors,

$$x_i + x_{i+2} = H_6(x)_{i+1} = H_6(y)_{i+1} = y_i + y_{i+2} \pmod{2}.$$

Or, par maximalité de i , $x_{i+2} = y_{i+2}$ et donc, en simplifiant, $x_i = y_i$, ce qui est absurde. On a donc $x = y$ et H_6 est injectif sur les configurations 0-finies. De plus, H_6 n'est pas surjectif car $H_6(A^{\mathbb{Z}}) \subseteq [0]_0$. \square

Proposition II.15. *L'automate H_5 est injectif mais n'est pas surjectif.*

Démonstration. On a $H_5(A^{\mathbb{Z}}) = [000]_{-1} \cup [111]_{-1}$ et donc H_5 n'est pas surjectif. Soit $x \in [000]_{-1} \cup [111]_{-1}$ alors la seule pré-image de x par H_5 est la configuration y définie par

1. $y_0 = x_0$,
2. $\forall i > 0, y_i = x_{i+1}$,
3. $\forall i < 0, y_i = x_{i-1}$.

\square

Nous donnons maintenant un exemple de ν -CA expansif non-transitif, ce qui montre que la Proposition I.27 n'est plus vraie pour les ν -CA.

Lemme II.16. *Soient x et y deux configurations telles que $d(x, y) < \frac{1}{2}$. Alors $d(H_6(x), H_6(y)) = 2d(x, y)$.*

Démonstration. Comme $d(x, y) < \frac{1}{2}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_{[-n, n]} = y_{[-n, n]}$ et $x_{[-n-1, n+1]} \neq y_{[-n-1, n+1]}$ et donc $d(x, y) = 2^{-n-1}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_{n+1} \neq y_{n+1}$. Comme H_6 est un ν -CA de rayon 1,

$$x_{[-n, n]} = y_{[-n, n]} \Rightarrow H_6(x)_{[-n+1, n-1]} = H_6(y)_{[-n+1, n-1]}.$$

D'autre part, $x_{n-1} = y_{n-1}$ et $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ donc

$$H_6(x)_n = x_{n-1} + x_{n+1} \neq y_{n-1} + y_{n+1} = H_6(y)_n \pmod{2}.$$

Finalement $d(H_6(x), H_6(y)) = 2^{-n} = 2d(x, y)$. \square

Proposition II.17. *L'automate H_6 est expansif mais n'est pas transitif.*

Démonstration. Soient x et y deux configurations distinctes. Si $d(x, y) < \frac{1}{2}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x, y) = 2^{-n-1}$. Par induction, en utilisant le Lemme II.16, on montre que $d(H_6^n(x), H_6^n(y)) = \frac{1}{2}$. Ceci prouve que H_6 est expansif de constante d'expansivité $\frac{1}{2}$. On a déjà montré que H_6 n'est pas surjectif, H_6 n'est donc pas transitif d'après le Corollaire I.26. \square

Chapitre III

Modèles de perturbation

Dans ce chapitre, nous allons étudier la stabilité structurelle des automates cellulaires. La stabilité structurelle s'intéresse à la modification des propriétés dynamiques d'un système lorsque sa structure est légèrement modifiée. Ces dernières années, de nombreuses applications basées sur les automates cellulaires ont utilisé une implémentation matérielle plutôt qu'une implémentation logicielle dans un souci d'optimisation de la vitesse d'exécution. Les circuits logiques programmables (FPGA) semblent particulièrement adaptés pour cela [36, 31]. La stabilité structurelle revient à étudier la dynamique produite par l'implémentation par rapport à la dynamique attendue en cas de panne de certaines portes logiques.

Définition III.1. On appelle **modèle de perturbation** d'un automate cellulaire F de règle locale f tout $d\nu$ -CA de règle par défaut f .

Ainsi, un modèle de perturbation d'un automate cellulaire est un ν -CA où les mêmes règles locales sont appliquées, sauf en un nombre fini de positions. On dira qu'une propriété est **structurellement stable** pour un automate cellulaire F si elle est vérifiée pour tout modèle de perturbation de F . De façon plus générale, nous allons étudier les liens entre automates cellulaires et leurs modèles de perturbations afin d'obtenir des propriétés sur la classe des $d\nu$ -CA.

Dans la Section III.1, nous nous intéressons aux propriétés de surjectivité et d'injectivité. Nous montrons qu'aucune de ces propriétés n'est structurellement stable. Nous prouvons par ailleurs que, si un modèle de perturbation vérifie l'une de ces propriétés, l'automate sur lequel il est basé la vérifie aussi. Cette étude nous permettra de montrer qu'une variante du Théorème du Jardin d'Eden (Théorème I.30) reste vraie pour les $d\nu$ -CA. Enfin, nous établissons que la surjectivité et l'injectivité sont des propriétés décidables sur les $d\nu$ -CA. La preuve de ce dernier résultat est en fait une conséquence d'une étude plus générale menée au Chapitre IV.

Dans la Section III.2, nous étudions la stabilité structurelle de certaines propriétés dynamiques. Il s'agit de la sensibilité, de l'équicontinuité et de

la presque équicontinuité. Nous montrons sur deux contre-exemples que la sensibilité et la presque équicontinuité ne sont pas structurellement stables. Ceci prouve que la notion de mots bloquants sur les automates cellulaires ne s'étend pas immédiatement aux $d\nu$ -CA. Nous développons alors une notion de mot fortement bloquant qui étend celle de mots bloquants. Nous montrons que la presque équicontinuité est structurellement stable pour les automates cellulaires qui admettent un mot fortement bloquant. Nous montrons aussi, grâce à cette notion, que l'équicontinuité est structurellement stable.

III.1 Surjectivité et injectivité

Dans un premier temps, nous considérons les propriétés de surjectivité et d'injectivité. Dans le cas des automates cellulaires, l'injectivité est équivalente à la réversibilité (Corollaire I.29), une caractéristique souvent nécessaire lors de la modélisation de phénomènes physiques. La surjectivité est une propriété qui intervient dans l'étude de la dynamique des automates cellulaires (et des systèmes dynamiques en général) notamment pour les comportements chaotiques [14]. Ces propriétés ne sont structurellement stables pour aucun automate cellulaire défini sur un alphabet contenant au moins deux lettres. Cependant il existe des conditions nécessaires pour qu'un modèle de perturbation soit surjectif ou injectif. L'étude de ces conditions conduira à une version affaiblie du théorème du Jardin d'Eden (Théorème I.30) pour les $d\nu$ -CA.

Proposition III.2. *Soit F un automate cellulaire sur un alphabet A de règle locale f et de rayon r avec $\text{Card}(A) \geq 2$. Il existe un modèle de perturbation de F qui n'est ni surjectif ni injectif.*

Démonstration. Soient a et b deux lettres distinctes de A . On note c_a la règle locale de rayon r telle que

$$\forall u \in A^{2r+1}, c_a(u) = a \ .$$

On définit alors la distribution θ sur $\{f, c_a\}$ telle que

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \theta_i = \begin{cases} c_a & \text{si } |i| \leq r \\ f & \text{sinon} \end{cases} \ .$$

On note H le $d\nu$ -CA induit par θ . L'automate H est un modèle de perturbation de F qui n'est ni surjectif ni injectif. En effet, $H(A^{\mathbb{Z}}) \subseteq [a^{2r+1}]_{-r} \neq A^{\mathbb{Z}}$ et $H(x) = H(y)$ pour les configurations x et y telles que

$$x_0 = a, y_0 = b \text{ et } \forall i \in \mathbb{Z}^*, x_i = y_i = a \ .$$

□

Ainsi la surjectivité et l'injectivité ne sont pas des propriétés structurellement stables. Il existe néanmoins des conditions nécessaires pour qu'un ν -CA dispose de l'une de ces propriétés. Dans un premier temps, la Proposition III.3 montre que la surjectivité d'un automate cellulaire est nécessaire aussi bien pour la surjectivité que l'injectivité de ses modèles de perturbation. La Proposition III.4 précise ce résultat dans le cas de l'injectivité : l'injectivité d'un automate cellulaire est nécessaire pour l'injectivité de ses modèles de perturbation. Ce faisant, nous montrons que l'injectivité et la réversibilité sont équivalentes dans le cas des ν -CA.

Proposition III.3. *Soient F un automate cellulaire et H un modèle de perturbation de F , alors :*

1. *si H est surjectif, alors F est surjectif ;*
2. *si H est injectif, alors F est surjectif.*

Démonstration. Notons f la règle locale de F , n le seuil de perturbation de H et r son rayon. Supposons que F ne soit pas surjectif.

1. D'après le Corollaire I.25, il existe alors un mot u non vide qui n'a pas de pré-image par f . Soit $y \in [u]_{n+1}$, supposons par l'absurde qu'il existe une configuration x telle que $H(x) = y$. On aurait alors

$$u = y_{[n+1, n+|u|]} = H(x)_{[n+1, n+|u|]} = f(x_{[n+1-r, n+|u|+r]}) ,$$

ce qui est contradictoire. Une telle configuration n'existe pas et H n'est pas surjectif.

2. De même, d'après la Proposition I.28, il existe des mots non vides u, v et w tels que $u \neq v$, $|w| \geq r$ et $f(uwv) = f(vwv)$. Soit $x \in [uwv]_{n+1}$, on définit y par

$$y_{[n+|w|, n+|uw|]} = v \text{ et } \forall i \in \mathbb{Z} \setminus [n+|w|, n+|uw|], y_i = x_i .$$

On a alors $H(x) = H(y)$ avec $x \neq y$ donc H n'est pas injectif.

□

Proposition III.4. *Soient F un automate cellulaire et H un modèle de perturbation de F , alors :*

1. *si H est injectif, alors F est injectif ;*
2. *si H est injectif, alors H est surjectif.*

Démonstration. Supposons que H soit injectif et notons A l'alphabet de H et n son seuil de perturbation. Soit $y \in A^{\mathbb{Z}}$, notons, pour tout mot $u \in A^{2n+1}$, $y(u) \in A^{\mathbb{Z}}$ la configuration telle que

$$y(u)_{[-n, n]} = u \text{ et } \forall i \in \mathbb{Z} \setminus [-n, n], y(u)_i = y_i .$$

Notons enfin $Y = \{y(u) : u \in A^{2n+1}\}$ et $X = F^{-1}(Y)$.

Comme H est injectif, d'une part $\text{Card}(X) = \text{Card}(H(X))$ et d'autre part, d'après la Proposition III.3, F est surjectif et donc $\text{Card}(X) \geq \text{Card}(A)^{2n+1}$. Comme H est un modèle de perturbation de F de seuil de perturbation n , $H(X) \subseteq Y$. Ainsi,

$$\text{Card}(A)^{2n+1} \leq \text{Card}(X) = \text{Card}(H(X)) \leq \text{Card}(Y) = \text{Card}(A)^{2n+1}$$

et les trois cardinaux sont égaux à $\text{Card}(A)^{2n+1}$.

L'égalité $\text{Card}(X) = \text{Card}(A)^{2n+1}$ indique que $y \in Y$ a une seule pré-image et donne l'injectivité de F tandis que l'égalité $H(X) = Y$ indique que $y \in Y$ a une pré-image par H et donc que H est surjectif. \square

Ce dernier résultat est l'équivalent pour les $d\nu$ -CA du Corollaire I.29 : l'injectivité est équivalente à la réversibilité dans le cas des $d\nu$ -CA. La Proposition II.15) donne un exemple de $p\nu$ -CA injectif non surjectif, ce qui montre que cette propriété n'est plus vraie pour les $p\nu$ -CA. Donc, parmi les classes de ν -CA que nous avons définies précédemment, les $d\nu$ -CA forment la plus grande classe qui vérifie encore l'équivalence entre injectivité et réversibilité. De plus, la Proposition II.14 montre que le Théorème du Jardin d'Eden, une version plus puissante de la présente proposition pour les automates cellulaires, ne s'étend pas aux $d\nu$ -CA.

Il est naturel de s'interroger s'il est possible, étant donnée la distribution de règles d'un $d\nu$ -CA, de déterminer si le $d\nu$ -CA engendré est surjectif ou injectif. Une étude plus générale dans le Chapitre IV permet de conclure dans ce cas particulier. Les Corollaires IV.19 et IV.24 permettent de prouver la Proposition III.5.

Proposition III.5. *La surjectivité et l'injectivité sont décidables sur les $d\nu$ -CA.*

III.2 Propriétés dynamiques

Dans cette partie, nous étudions la stabilité structurelle de plusieurs propriétés dynamiques. Nous nous intéressons particulièrement à l'équicontinuité, à la presque équicontinuité et à la sensibilité de ces systèmes. Dans le cas des automates cellulaires classiques, ces propriétés sont liées à la notion de mots bloquants (Définition I.31, Propositions I.33 et I.34). Nous allons généraliser certains de ces résultats aux $d\nu$ -CA.

La première chose que nous allons montrer est que la présence de mots bloquants n'est ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante pour la presque équicontinuité. Concrètement, nous allons exhiber deux automates cellulaires, l'un sensible et l'autre presque-équicontinu, qui admettent

un modèle de perturbation presque équicontinu et un modèle de perturbation sensible respectivement. Outre le fait que cela indique que les propriétés de sensibilité et de presque-équicontinuité ne sont pas stables dans le cas général, cela indique aussi que la notion de mot bloquant n'est pas une notion locale. Ainsi un mot peut bloquer une colonne de la dynamique d'un automate cellulaire du fait de l'uniformité de la règle mais la moindre modification de cette règle à un endroit peut éventuellement le rendre non bloquant.

Premier contre-exemple

Soit $A = \{0, 1, 2\}$. On définit la règle locale $f : A^3 \rightarrow A$ par

$$\forall x, y, z \in A, f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \text{ et } (y = 1 \text{ ou } y, z \neq 2) \\ 2 & \text{si } z = 2 \text{ et } (y = 2 \text{ ou } x, y \neq 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note F l'automate cellulaire de règle locale f . La dynamique de F s'interprète aisément, l'état 0 est un état neutre représentant le milieu ambiant, l'état 1 représente une particule se propageant vers la droite tandis que l'état 2 représente une particule se propageant vers la gauche. Lorsque deux particules se rencontrent, elles s'annihilent mutuellement. Un exemple de dynamique de cet automate est présenté à la Figure III.1, les états 0, 1 et 2 sont représentés respectivement en blanc, gris et noir. Ce sera également le cas pour les figures suivantes.

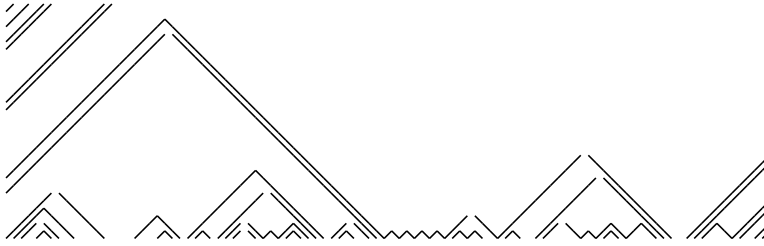


FIGURE III.1 – Diagramme espace-temps du premier contre-exemple.

Proposition III.6. *L'automate F est sensible.*

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u \in A^{2n+1}$. On note $x \in [u]_{-n}$ la configuration telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x_i = 0$ si $|i| > n$. Par récurrence, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} \forall i < -n + k, F^k(x)_i \neq 1 \\ \forall i > n - k, F^k(x)_i \neq 2 \end{cases}$$

et par suite

$$\forall k > n, F^k(x)_0 = 0 \text{ .}$$

On note $y \in [u]_{-n}$ la configuration telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $y_i = 1$ si $|i| > n$. Par récurrence, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} \forall i < -n, F^k(y)_i = 1 \\ \forall i > n - k, F^k(y)_i \neq 2 \end{cases}$$

par conséquent

$$\forall k > 2n, \forall i \in \mathbb{Z}, F^k(y)_i \neq 2$$

et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i < -n + k, F^{2n+1+k}(y)_i = 1 \text{ .}$$

En particulier,

$$\forall k > 3n + 1, F^k(y)_0 = 1 \text{ .}$$

Finalement pour toute configuration $z \in [u]_{-n}$, $d(F^{3n+2}(z), F^{3n+2}(x)) = 1$ ou $d(F^{3n+2}(z), F^{3n+2}(y)) = 1$. Ce qui prouve que F est sensible de constante de sensibilité 1. \square

On note H_7 le $d\nu$ -CA sur A défini par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H_7(x)_i = \begin{cases} 2 & \text{si } i = -1 \\ 1 & \text{si } i = 1 \\ f(x_{[i-1, i+1]}) & \text{sinon} \end{cases} \text{ .}$$

L'automate H_7 est un modèle de perturbation de F qui possède deux générateurs de particules. Un exemple de dynamique de H_7 est présenté à la Figure III.2.

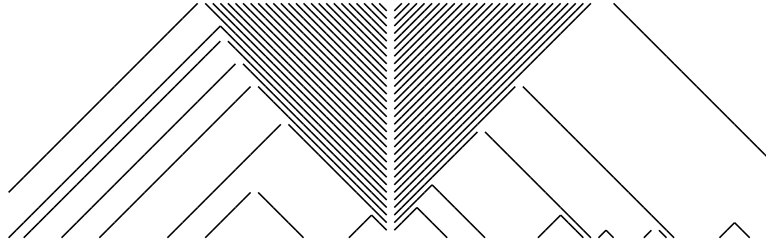


FIGURE III.2 – Diagramme espace-temps de H_7 .

Proposition III.7. *L'automate H_7 est presque équicontinu.*

Démonstration. Pour tout entier positif n , on définit l'ensemble $T_n \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ par

$$\begin{aligned} T_n &= \left\{ x \in A^{\mathbb{Z}} : \exists k > n, \forall i \in \mathbb{N}, |i| \in [k+1, 3k-2] \Rightarrow x_i = 0 \right\} \\ &= \bigcup_{k > n} [0^{2k-2}]_{-3k+2} \cap [0^{2k-2}]_{k+1} . \end{aligned}$$

L'ensemble T_n est un ouvert en tant qu'union de cylindres. De plus, T_n est dense car on peut y trouver n'importe quel segment initial pour k suffisamment grand.

On note $T = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Soient $x \in T$ et $n > 0$, comme $x \in T_n$, il existe $k > n$ tel que

$$\forall i \in [k+1, 3k-2] \cup [-3k+2, -k-1], x_i = 0 .$$

Par symétrie et indépendance de la dynamique par rapport à l'indice 0, on ne s'intéresse qu'aux indices positifs pour l'étude de la dynamique.

On montre par récurrence que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in [\max(1, k+1-i), 3k-2-i], H_7^i(x)_j \neq 2 .$$

Et donc, en particulier,

$$\forall j \in [2, 2k-1], H_7^{k-1}(x)_j \neq 2 .$$

On sait par ailleurs que $H_7^{k-1}(x)_1 = 1$. On montre ensuite, par une récurrence, que

$$\forall i \in [0, k-1], \forall j \in [1, i+1], H_7^{k-1+i}(x)_j = 1 .$$

En particulier,

$$H_7^{2k-2}(x)_{[1,k]} = 1^k .$$

Pour finir, on montre par récurrence que

$$\forall i \geq 2k-2, H_7^i(x)_{[1,k]} = 1^k .$$

On a de même l'égalité symétrique pour les indices négatifs,

$$\forall i \geq 2k-2, H_7^i(x)_{[-k,-1]} = 2^k .$$

et pour tout entier $i > 1$, $H_7^i(x)_0 = 0$. Ce qui permet de conclure que

$$\forall i \geq 2k-2, H_7^i(x)_{[-k,k]} = 2^k 0 1^k .$$

Le point x est donc un point d'équicontinuité de H_7 et l'ensemble T est inclus dans l'ensemble des points d'équicontinuité de H_7 qui est donc résiduel. \square

On vient d'exhiber un automate cellulaire sensible qui admet un modèle de perturbation presque équicontinu. Les mots bloquants ne sont donc pas nécessaires pour obtenir un modèle de perturbation presque équicontinu. Cela prouve également le Théorème III.8.

Théorème III.8. *La sensibilité n'est pas une propriété structurellement stable pour les automates cellulaires.*

Second contre-exemple

Soit $A = \{0, 1, 2\}$. On définit la règle locale $f : A^3 \rightarrow A$ par

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A, f(x, 0, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f(x, 1, y) &= \begin{cases} 2 & \text{si } x = 2 \text{ ou } y = 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ f(x, 2, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned}$$

On note F l'automate cellulaire de règle locale f . La dynamique de F s'interprète aisément. L'état 0 est le milieu ambiant neutre, l'état 1 se propage et se duplique au contact de l'état 0 tandis que l'état 2 se propage au contact de l'état 1 en le détruisant. Un exemple de dynamique est présenté à la Figure III.3.

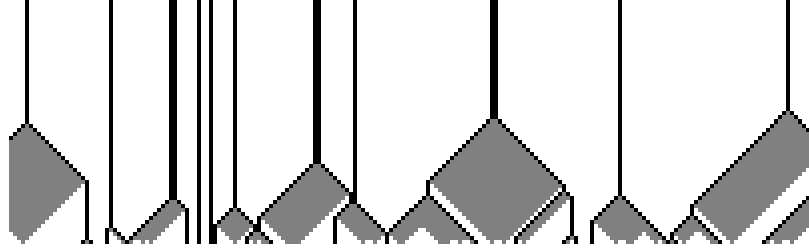


FIGURE III.3 – Diagramme espace-temps du second contre-exemple.

Proposition III.9. *L'automate F est presque équicontinu.*

Démonstration. Le mot 202 est bloquant pour F . En effet,

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall x \in [20^k 2]_i, \\ F(x) \in [20^k 2]_i \cup [20^{k+1} 2]_{i-1} \cup [20^{k+1} 2]_i \cup [20^{k+2} 2]_{i-1} , \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall x \in [202]_i, F^n(x) \in [0]_{i+1} .$$

Nous avons prouvé que 202 est un mot 1-bloquant pour F . La Proposition I.33 permet de conclure : l'existence d'un mot bloquant implique la presque équicontinuité. \square

On note H_8 le dv-CA sur A défini par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H_8(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ f(x_{[i-1, i+1]}) & \text{sinon} \end{cases} .$$

L'automate H_8 est un modèle de perturbation de F qui possède un générateur d'états 1. Un exemple de dynamique de H_8 est présenté à la Figure III.4. On remarque que l'état 2 disparaît au contact du générateur alors qu'un tel état ne pouvait pas disparaître dans F .

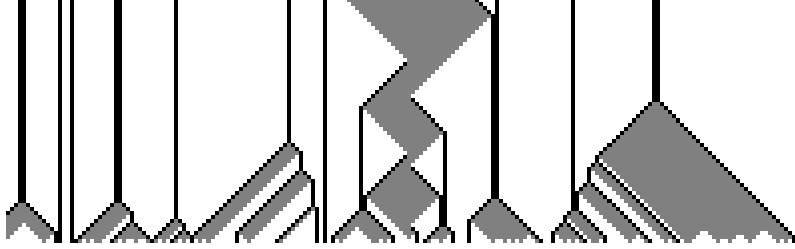


FIGURE III.4 – Diagramme espace-temps de H_8 .

On peut restreindre l'étude de la dynamique de H_8 aux entiers positifs. En effet, l'automate H_8 est symétrique par rapport à 0 et la dynamique sur les indices positifs et négatifs est indépendante. Nous allons maintenant montrer que H_8 est sensible. Nous introduisons pour ce faire plusieurs lemmes.

Dans le Lemme III.10, nous montrons que, dans la dynamique engendrée par une configuration 2-finie, l'état 2 apparaît infiniment souvent dans la première colonne. On peut voir l'évolution d'une configuration 2-finie sur la Figure III.5.

Lemme III.10. *Soit $u \in A^*$, on note x la configuration telle que*

$$\begin{cases} x_{[0,|u|-1]} = u \\ \forall i < 0, x_i = 2 \\ \forall i \geq |u|, x_i = 2 \end{cases}$$

et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)} = H_8^n(x)$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \geq n$ tel que $x_1^{(n_0)} = 2$.

Démonstration. Comme 2 est un état quiescent pour F , toute image d'une configuration 2-finie par H_8 est une configuration 2-finie. De plus, pour tout entier $n > 0$, $x_0^{(n)} = 1$. Ainsi les entiers α_n , β_n et γ_n tels que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n &= \max \left\{ i \in \mathbb{N} : x_{[0,i]}^{(n)} = 1^{i+1} \right\}, \\ \beta_n &= \min \left\{ i \in \mathbb{N} : x_i^{(n)} = 2 \right\} \text{ et} \\ \gamma_n &= \min \left\{ i \in \mathbb{N} : x_i^{(n)} = 2 \text{ et } \forall j > i, x_j^{(n)} \neq 1 \right\} \end{aligned}$$

sont bien définis.

On a donc, par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \alpha_n < \beta_n \leq \gamma_n .$$

Nous allons montrer que pour un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\beta_{n_0} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Premier cas : $\alpha_n + 1 = \beta_n = 1$. On pose alors $n = n_0$ et $x_1^{(n_0)} = 2$.

Deuxième cas : $\alpha_n + 1 = \beta_n > 1$. On en déduit que

$$\forall k \in [0, \beta_n - 1], \alpha_{n+k} + 1 = \beta_{n+k} = \beta_n - k .$$

On se retrouve donc dans le premier cas pour $n_0 = n + \beta_n - 1$.

Troisième cas : $x_{\alpha_n+1}^{(n)} = 0$. En ce cas, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1$ et $\gamma_{n+1} \leq \gamma_n$. On a donc $\gamma_{n+1} - \alpha_{n+1} < \gamma_n - \alpha_n$. Comme il ne peut y avoir de suite infinie d'entiers strictement décroissante, on se retrouve dans le second cas pour un indice $k > n$. \square

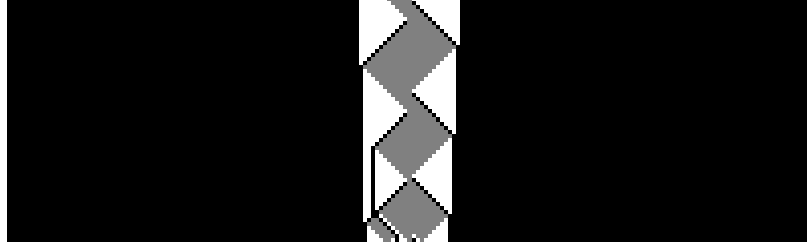


FIGURE III.5 – Diagramme espace-temps de H_8 sur une configuration 2-finie.

Le but des deux lemmes suivants est de montrer que la dynamique engendrée par une configuration 0-finie ne fait plus apparaître que des 1 dans la première colonne au bout d'un certain temps. On peut voir l'évolution d'une configuration 2-finie sur la Figure III.6.

Lemme III.11. Soit $u \in A^*$, on définit la suite $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u^{(0)} = u \\ \forall n \in \mathbb{N}, u^{(n+1)} = f(1u^{(n)}0) \end{cases} .$$

Il existe un entier n_0 tel que $u_{|u|-1}^{(n_0)} \neq 2$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{|u|-1}^{(n)} = 2.$$

On peut alors définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers α_n , β_n et γ_n par

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \min \left\{ i \in [0, |u| - 1] : x_i^{(n)} = 2 \text{ et } \forall j \in [i + 1, |u| - 1], x_j^{(n)} \neq 1 \right\}, \\ \beta_n &= \min \left\{ i \in [0, |u| - 1] : \forall j \in [i, |u| - 1], x_j^{(n)} \neq 1 \right\} \text{ et} \\ \gamma_n &= \sum_{i \in [\alpha_n, |u| - 1]} \frac{x_i^{(n)}}{2}. \end{aligned}$$

On note alors $\delta_n = (\gamma_n, \alpha_n, \alpha_n - \beta_n)$. Soit \prec l'ordre lexicographique sur \mathbb{N}^3 induit par l'ordre naturel sur \mathbb{N} . L'entier α_n désigne la première position qui contient un 2 et à partir de laquelle on ne rencontre plus de 1, β_n est la première position à partir de laquelle on ne rencontre plus de 1 et γ_n est le nombre de 2 dans $u^{(n)}$ à partir de α_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous allons montrer que $\delta_{n+1} \prec \delta_n$.

Premier cas : $\alpha_n = \beta_n = 0$. Alors il existe $w \in \{0, 2\}^*$ tels que $u^{(n)} = 2w$. On a alors $u^{(n+1)} = 1w$, d'où $\gamma_{n+1} = \gamma_n - 1$.

Deuxième cas : $\alpha_n = \beta_n > 0$. Alors il existe $v \in A^{\alpha_n - 1}$ et $w \in \{0, 2\}^*$ tels que $u^{(n)} = v12w$. On a alors $u^{(n+1)} = f(1v1)20w$, d'où $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ et $\gamma_{n+1} = \gamma_n$.

Troisième cas : $\alpha_n > \beta_n > 0$. Alors il existe $v \in A^{\beta_n - 1}$ et $w \in \{0, 2\}^*$ tels que $u^{(n)} = v10^{\alpha_n - \beta_n}2w$. On a alors $u^{(n+1)} = f(1v10)10^{\alpha_n - \beta_n - 1}2w$, d'où $\alpha_{n+1} = \alpha_n$, $\beta_{n+1} = \beta_n + 1$ et $\gamma_{n+1} = \gamma_n$.

Quatrième cas : $\alpha_n > \beta_n = 0$. Alors il existe $w \in \{0, 2\}^*$ tels que $u^{(n)} = 0^{\alpha_n - \beta_n}2w$. On a alors $u^{(n+1)} = 10^{\alpha_n - \beta_n - 1}2w$ d'où $\alpha_{n+1} = \alpha_n$, $\beta_{n+1} = \beta_n + 1$ et $\gamma_{n+1} = \gamma_n$.

Dans tous les cas, nous avons $\delta_{n+1} \prec \delta_n$. Mais il ne peut y avoir de suite infinie strictement décroissante dans \mathbb{N}^3 pour l'ordre lexicographique, nous avons donc une contradiction et notre hypothèse est fausse. \square

Lemme III.12. Soit $u \in A^*$, on note y la configuration telle que

$$\begin{cases} y_{[0, |u| - 1]} = u \\ \forall i < 0, y_i = 0 \\ \forall i \geq |u|, y_i = 0 \end{cases}$$

et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $y^{(n)} = H_8^n(y)$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $y_1^{(n)} \neq 2$.

Démonstration. Comme 0 est un état quiescent pour F , toute image d'une configuration 0-finie par H_8 est une configuration 0-finie. On note S l'ensemble $\{00, 02, 10, 11, 21\}$, et on définit alors l'entier α_n tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \min \left\{ i \in \mathbb{N}, \forall j \geq i, y_{[j,j+1]}^{(n)} \in S \right\}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $j > \alpha_n$, on sait que $y_{[j-1,j]}^{(n)}$, $y_{[j,j+1]}^{(n)}$ et $y_{[j+1,j+2]}^{(n)}$ sont dans S . On sait donc quels sont les motifs possibles pour $y_{[j-1,j+2]}^{(n)}$ et donc pour $y_{[j,j+1]}^{(n+1)} = f(y_{[j-1,j+2]}^{(n)})$.

$y_{[j-1,j+2]}^{(n)}$	0000	0002	0021	0210	0211	1000	1002
$y_{[j,j+1]}^{(n+1)}$	00	00	00	02	02	10	10

$y_{[j-1,j+2]}^{(n)}$	1021	1100	1102	2100	2110	2111
$y_{[j,j+1]}^{(n+1)}$	10	11	11	21	21	21

TABLE III.1 – Possibilités pour $y_{[j-1,j+2]}^{(n)}$ et $y_{[j,j+1]}^{(n+1)}$.

On en déduit que $y_{[j,j+1]}^{(n+1)} \in S$. On s'intéresse maintenant à $y_{[\alpha_n, \alpha_n+1]}^{(n+1)}$. Deux cas de figure sont possibles :

Premier cas : $\alpha_n = 0$. On sait alors que $y_0^{(n)} = 1$, et que $y_{[0,1]}^{(n)}$ et $y_{[1,2]}^{(n)}$ sont dans S . D'où $y_{[0,2]}^{(n)} \in \{100, 102, 110, 111\}$ et $y_1^{(n+1)} = 1$ d'où $y_{[0,1]}^{(n+1)} = 11 \in S$.

Deuxième cas : $\alpha_n > 0$. On sait alors que $y_{[\alpha_n-1, \alpha_n]}^{(n)} \notin S$, et que $y_{[\alpha_n, \alpha_n+1]}^{(n)}$ et $y_{[\alpha_n+1, \alpha_n+2]}^{(n)}$ sont dans S . On sait donc quels sont les motifs possibles pour $y_{[\alpha_n-1, \alpha_n+2]}^{(n)}$ et donc pour $y_{[\alpha_n, \alpha_n+1]}^{(n+1)} = f(y_{[\alpha_n-1, \alpha_n+2]}^{(n)})$.

$y_{[\alpha_n-1, \alpha_n+2]}^{(n)}$	0100	0102	0110	1210	1211
$y_{[\alpha_n, \alpha_n+1]}^{(n+1)}$	11	11	11	02	02

$y_{[\alpha_n-1, \alpha_n+2]}^{(n)}$	2000	2002	2021	2210	2211
$y_{[\alpha_n, \alpha_n+1]}^{(n+1)}$	00	00	00	02	02

TABLE III.2 – Possibilités pour $y_{[\alpha_n-1, \alpha_n+2]}^{(n)}$ et $y_{[\alpha_n, \alpha_n+1]}^{(n+1)}$.

On en déduit que $y_{[\alpha_n, \alpha_n+1]}^{(n+1)} \in S$ et donc que $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'entiers. Elle est donc stationnaire et admet une limite l . Notons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que

$$\forall n \geq n_0, \alpha_n = l .$$

Supposons par l'absurde que $l \neq 0$. En ce cas, pour les mêmes raisons que précédemment, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$y_{[l-1, l+1]}^{(n)} \in \{0100, 0102, 0110, 1210, 1211, 2000, 2002, 2021, 2210, 2211\} .$$

On peut exclure les trois premiers motifs car ils font décroître α_n ce qui n'est plus possible (on a atteint la limite). Ce qui permet de conclure que,

$$\forall n > n_0, y_l^{(n)} = 0$$

puis

$$\forall n > n_0, y_{[l-1, l]}^{(n)} = 20 .$$

Considérons maintenant la suite $(u^{(n)} = y_{[1, l-1]}^{(n+n_0+1)})_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^{(n+1)} = f(1u^{(n)}0)$$

et nous pouvons alors appliquer le Lemme III.11. Il existe donc un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{l-2}^{(n_1)} \neq 2$, i.e. $y_{l-1}^{(n_1+n_0+1)} \neq 2$. Ce qui est une contradiction.

On a donc $l = 0$ et

$$\forall n \geq n_0, y_{[0, 1]}^{(n)} \in S ,$$

comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_0^{(n)} = 1 ,$$

on conclut que

$$\forall n \geq n_0, y_1^{(n)} \neq 2 .$$

□

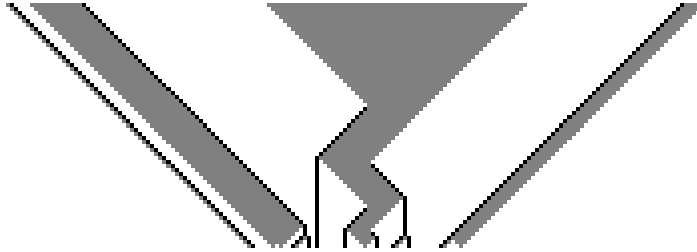


FIGURE III.6 – Diagramme espace-temps de H_8 sur une configuration 0-finie.

Proposition III.13. *L'automate H_8 est sensible.*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $u \in A^{2k+1}$. Soit $z \in [u]_{-k}$, on note x et y les configurations de $[u]_{-k}$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x_i = 2$ et $y_i = 0$ si $|i| > k$.

D'après le Lemme III.12, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $H_8^n(y)_1 \neq 2$. D'après le Lemme III.10, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $H_8^{n_1}(x)_1 = 2$.

On a donc $d(H_8^{n_1}(z), H_8^{n_1}(x)) = \frac{1}{2}$ ou $d(H_8^{n_1}(z), H_8^{n_1}(y)) = \frac{1}{2}$. Ce qui prouve que H_8 est sensible. \square

Nous venons d'exhiber un automate cellulaire presque équicontinu qui admet un modèle de perturbation sensible. Les mots bloquants ne sont donc pas une condition suffisante pour obtenir un modèle de perturbation presque équicontinu. Cela prouve également le Théorème III.14.

Théorème III.14. *La presque-équicontinuité n'est pas une propriété structurellement stable pour les automates cellulaires.*

Mots fortement bloquants

Nous avons vu que les mots bloquants ne permettent pas de caractériser la presque équicontinuité d'un modèle de perturbation. En fait, l'étude de H_8 indique qu'un mot peut être bloquant pour un automate cellulaire parce que son contexte est connu et est uniforme : une même règle est appliquée à toute position. La moindre modification de cette règle en une position, aussi éloignée soit-elle, peut invalider le fait que le mot soit bloquant. Cela signifie que les mots bloquants ne constituent pas une notion locale du point de vue des ν -CA. Il est naturel alors de considérer une généralisation des mots bloquants qui ne nécessite qu'un contexte fini pour «bloquer» une colonne de la dynamique.

Définition III.15. Soient F un automate cellulaire de règle locale f sur un alphabet A , $u \in A^*$ et $s \in [1, |u|]$. Le mot u est dit **fortement s -bloquant** pour F si et seulement s'il existe une **marge** $d \in [0, |u| - s]$ telle que pour toute distribution de règles θ sur A vérifiant $\forall i \in [0, |u| - 1], \theta_i = f$, on ait

$$\forall x, y \in [u]_0, \forall n \in \mathbb{N}, H_\theta^n(x)_{[d, d+s-1]} = H_\theta^n(y)_{[d, d+s-1]} .$$

Cette définition signifie que, si u est un mot fortement bloquant pour un automate cellulaire F de règle locale f , et si u est facteur d'une configuration à des indices où s'applique f , alors u bloque une colonne de la dynamique indépendamment des règles qui s'appliquent aux autres positions. Autrement dit, u est bloquant dans n'importe quel ν -CA dès lors que f s'applique dans un voisinage fini de u .

Corollaire III.16. *Tout mot fortement s -bloquant pour un automate cellulaire F est s -bloquant pour F .*

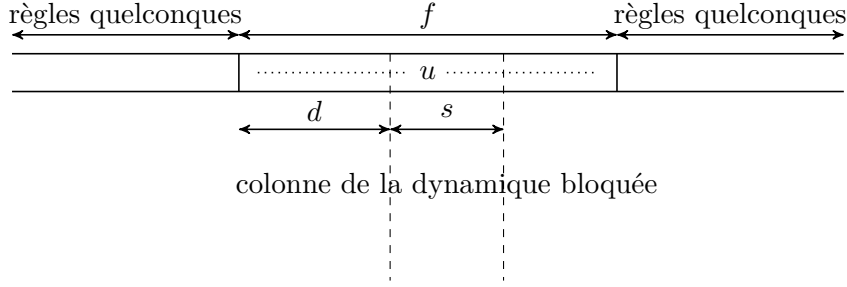


FIGURE III.7 – Un mot fortement bloquant.

La réciproque est fausse comme nous l'avons déjà montrée. La Proposition III.19 prouve que les mots fortement bloquants sont suffisants pour assurer la presque équicontinuité. La présence de mots fortement bloquants n'est cependant pas nécessaire comme le montre le premier contre-exemple : un automate cellulaire sensible, et donc sans mot bloquant (Proposition I.33), admet un modèle de perturbation presque-équicontinu (Propositions III.6 et III.7).

Remarque III.17. Si u est un mot fortement s -bloquant pour un automate cellulaire F , alors uu est un mot fortement $2s$ -bloquant pour F .

Remarque III.18. Dans la suite, on supposera que, pour tout modèle de perturbation H d'un automate cellulaire F , F et H ont le même rayon. En effet, si F est défini par une règle locale f de rayon r , on peut également définir F par une règle locale f' de rayon $r' \geq r$. On choisit alors r' comme étant le plus grand rayon d'une perturbation.

Les Remarques III.17 et III.18 nous autorisent à parler de mots fortement r -bloquants dans les propositions suivantes sans avoir à prendre en compte d'éventuelles perturbations de grand rayon dans un modèle de perturbation.

Proposition III.19. Soient F un automate cellulaire de rayon r et H un modèle de perturbation de F . Si F admet un mot fortement r -bloquant alors H est presque-équicontinu.

Démonstration. La preuve est similaire à celle proposée dans [38] pour prouver la Proposition I.33. On note d la marge de u et n le seuil de perturbation de H . Pour tout entier $k > 0$, on définit l'ensemble $T_k \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ par

$$\begin{aligned} T_k &= \left\{ x \in A^{\mathbb{Z}} : \exists i > k, x_{[i+1, i+|u|]} = x_{[-i-|u|, -i-1]} = u \right\} \\ &= \bigcup_{i > k} [u]_{-i-|u|} \cap [u]_{i+1} . \end{aligned}$$

L'ensemble T_n est un ouvert en tant qu'union de cylindres. De plus T_n est dense car on peut y trouver n'importe quel segment initial pour i suffisamment grand.

On note $T = \bigcap_{k \geq n} T_n$. Soient $x \in T$ et $k \geq n$, comme $x \in T_k$, il existe $i > k$ tel que

$$x_{[i+1, i+|u|]} = x_{[-i-|u|, -i-1]} = u \ .$$

Soit $y \in A^{\mathbb{Z}}$ tel que $y_{[-i-|u|, i+|u|]} = x_{[-i-|u|, i+|u|]}$. Nous allons montrer par récurrence que pour

$$\forall t \in \mathbb{N}, H^t(x)_{[-i-|u|+d, i+d+r]} = H^t(y)_{[-i-|u|+d, i+d+r]} \ .$$

C'est vrai pour $t = 0$ car $y_{[-i-|u|, i+|u|]} = x_{[-i-|u|, i+|u|]}$. Soit $t \in \mathbb{N}$ tel que

$$H^t(x)_{[-i-|u|+d, i+d+r]} = H^t(y)_{[-i-|u|+d, i+d+r]} \ .$$

On a alors

$$H^{t+1}(x)_{[-i-|u|+d+r, i+d]} = H^{t+1}(y)_{[-i-|u|+d+r, i+d]} \ .$$

Et comme u est fortement r -bloquant, on a aussi

$$\begin{aligned} H^{t+1}(x)_{[-i-|u|+d, -i-|u|+d+r]} &= H^{t+1}(y)_{[-i-|u|+d, -i-|u|+d+r]} \text{ et} \\ H^{t+1}(x)_{[i+d+1, i+d+r]} &= H^{t+1}(y)_{[i+d+1, i+d+r]} \ . \end{aligned}$$

D'où

$$H^{t+1}(x)_{[-i-|u|+d, i+d+r]} = H^{t+1}(y)_{[-i-|u|+d, i+d+r]} \ .$$

Nous avons montré que

$$\begin{aligned} \forall x \in T, \forall k \geq n, \exists i \in \mathbb{N}, \forall y \in A^{\mathbb{Z}}, \\ y_{[-i, i]} = x_{[-i, i]} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{N}, H^t(y)_{[-k, k]} = H^t(x)_{[-k, k]} \ . \end{aligned}$$

Donc tout point de T est un point d'équicontinuité. Comme T est une intersection d'ouverts denses, H est presque-équicontinu. \square

Cependant il y a des liens plus forts entre équicontinuité et mots fortement bloquants qui généralisent la Proposition I.34.

Proposition III.20. *Soit F un automate cellulaire de rayon r sur un alphabet A . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) F est équicontinu.
- (2) Il existe $k > 0$ tel que tout mot de A^{2k+1} est fortement r -bloquant.
- (3) Tout modèle de perturbation de F est ultimement périodique.

Démonstration. Nous allons montrer que (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1). Notons A l'alphabet de F et f sa règle locale (de rayon r).

(1) \Rightarrow (2). Supposons que F soit équicontinu. D'après la Proposition I.34, F est ultimement périodique. Il existe $p > 0$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $F^{q+p} = F^q$. Ce qui implique

$$\forall u \in A^*, |u| > 2(q+p)r \Rightarrow f^{q+p}(u) = f^q(u)_{[pr, |u| - (2q+p)r - 1]} \quad .$$

Soit θ une distribution de règles sur A telle que

$$\forall i \in [0, (2p+2q+1)r-1], \theta_i = f$$

et H le ν -CA engendré par θ . Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$, on note pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_k &= H^k(x)_{[0, qr-1]} \\ t_k &= H^k(x)_{[qr, (q+p)r-1]} \\ u_k &= H^k(x)_{[(q+p)r, (q+p+1)r-1]} \\ v_k &= H^k(x)_{[(q+p+1)r, (q+2r+1)r-1]} \\ w_k &= H^k(x)_{[(q+2p+1)r, (2q+2p+1)r-1]} \quad . \end{aligned}$$

Or, pour tout entier $k \in [0, q+p]$, $u_k = f^k(x_{[(p+q-k)r, (p+q+k+1)r-1]})$. Par suite, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{p+q+k} &= f^{q+p}(s_k t_k u_k v_k w_k) \\ &= f^q(s_k t_k u_k v_k w_k)_{[pr, (p+1)r]} \\ &= (t_{q+k} u_{q+k} v_{u+k})_{[pr, (p+1)r]} \\ &= u_{q+k} \quad . \end{aligned}$$

En notant k' le reste modulo p de k , on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{q+k} = u_{q+k'} = f^{q+k'}(x_{[(p-k')r, (p+2q+k'+1)r-1]}) \quad .$$

Pour résumer, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de mots de taille r est entièrement déterminée par $x_{[0, (2p+2q+1)r-1]}$. Ce mot est donc fortement r -bloquant. Comme x est une configuration arbitraire, tout mot de taille $2p+2q+r$ est fortement r -bloquant pour F .

(2) \Rightarrow (3). Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que tout mot de taille k est fortement r -bloquant pour F . D'après la Proposition I.34, F est alors ultimement périodique, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $p > 0$ tels que $F^{p+q} = F^q$. Soit H un modèle de perturbation de F de seuil de perturbation n et $x \in A^{\mathbb{Z}}$. Comme $x_{[-n-k, -n-1]}$ et $x_{[n+1, n+k]}$ sont fortement r -bloquants,

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathbb{N}, |i| > n+k \Rightarrow H^j(x)_i = F^j(x)_i$$

et donc en particulier

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathbb{N}, |i| > n+k \Rightarrow H^{q+p+j}(x)_i = H^{q+j}(x)_i \quad .$$

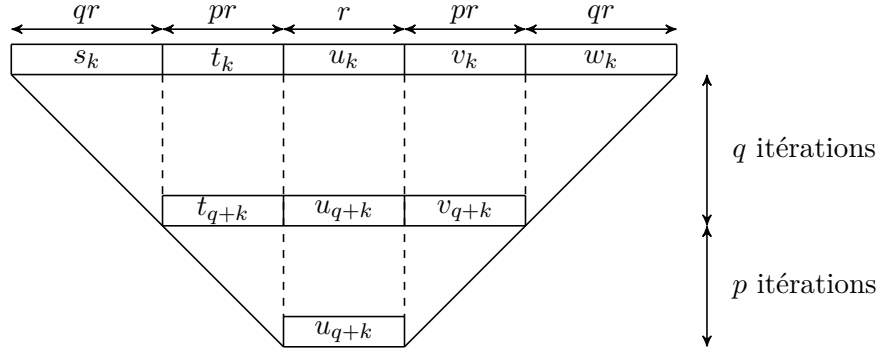


FIGURE III.8 – Un mot fortement bloquant pour un automate cellulaire équicontinu.

Les mots $x_{[-n-2k, -n-k-1]}$ et $x_{[n+k+1, n+2k]}$ sont fortement r -bloquants. Notons d_1 et d_2 leurs marges respectives, alors les suites

$$\left(H^j(x)_{[-n-2k+d_1, -n-2k+d_1+r]} \right)_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(H^j(x)_{[-n+k+d_2, n+k+d_2+r]} \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

sont entièrement déterminées par $x_{[-n-2k, -n-k-1]}$ et $x_{[n+k+1, n+2k]}$ respectivement. En conséquence, comme H est de rayon r , la suite

$$\left(H^j(x)_{[-n-2k+d_1, n+k+d_2+r]} \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

est entièrement déterminée par $v = x_{[-n-2k, n+2k]}$. C'est en particulier le cas pour la suite

$$\left(H^j(x)_{[-n-k, n+k]} \right)_{j \in \mathbb{N}} .$$

Notons $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ cette suite. C'est une suite sur l'ensemble fini $A^{2(n+k)+1}$, il existe donc des entiers $\alpha_v \geq q$ et $\beta_v > 0$ tels que $u_{\alpha_v + p\beta_v} = u_{\alpha_v}$. On a alors $H^{\alpha_v}(x) = H^{\alpha_v + p\beta_v}(x)$. La configuration x est donc ultimement périodique de période β_v et de pré-période α_v .

Notons

$$q' = \max(\alpha_v : v \in A^{2(n+k)+1}) \quad \text{et} \quad p' = \text{ppcm}(p\beta_v : v \in A^{2(n+k)+1}) .$$

On a alors

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, H^{q'+p'}(x) = H^{q'}(x)$$

et H est ultimement périodique.

(3) \Rightarrow (1). L'automate F est un cas particulier de modèle de perturbation de F donc est ultimement périodique et par conséquent équicontinu. \square

La Proposition III.20 nous permet alors de démontrer le Théorème III.21.

Théorème III.21. *L'équicontinuité est une propriété structurellement stable pour les automates cellulaires.*

Démonstration. Tout modèle de perturbation d'un automate cellulaire équicontinu est ultimement périodique donc équicontinu. \square

Il faut cependant remarquer que, contrairement à ce qui se passe pour les automates cellulaires où l'équicontinuité et le caractère ultimement périodique sont équivalents, l'équivalence n'est plus vraie pour les $d\nu$ -CA. De même, un automate cellulaire peut admettre un modèle de perturbation équicontinu sans l'être lui-même. C'est ce que nous allons montrer sur un exemple.

Notons f la règle locale de rayon 1 sur $A = \{0, 1\}$ définie par

$$\forall a, b, c \in A, f(a, b, c) = \max(a, b, c)$$

et F l'automate cellulaire de règle locale f . Notons maintenant H le modèle de perturbation de F tel que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ f(x_{[i-1, i+1]}) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Proposition III.22. *L'automate F est presque équicontinu mais pas équicontinu. L'automate H est équicontinu.*

Démonstration. L'automate F est presque-équicontinu car le mot 1 est bloquant pour F .

Notons x la configuration telle que

$$\forall i \in \mathbb{Z}, x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z}, F^k(x)_i = H^k(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in [-k, k] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc ni F ni H ne sont ultimement périodiques et F n'est pas équicontinu.

Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $y, z \in A^{\mathbb{Z}}$ tels que $y_{[-2n-1, 2n+1]} = z_{[-2n-1, 2n+1]}$. Comme H est de rayon 1,

$$\forall k \in [0, n], H^k(y)_{[-2n-1+k, 2n+1-k]} = H^k(z)_{[-2n-1+k, 2n+1-k]}$$

mais on sait aussi que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, H^k(y)_{[-k, k]} = H^k(z)_{[-k, k]} = 1^{2k-1}$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, H^k(y)_{[-n, n]} = H^k(z)_{[-n, n]}$$

et H est équicontinu. \square

Chapitre IV

Nombre fini de règles et propriétés

Comme nous l'avons esquissé au Chapitre II, les automates cellulaires non-uniformes ont beaucoup été utilisés comme modèles ou outils dans divers domaines, souvent de manière *ad hoc*. La plupart du temps, un ensemble de règles est donné et les auteurs cherchent la manière de les distribuer pour obtenir certaines propriétés dans l'automate induit. Nous allons utiliser cette approche mais pour un ensemble de règles arbitraire. Deux raisons principales motivent cette démarche. L'une est bien sûr d'uniformiser des méthodes qui ont pu être utilisées dans des cas particuliers et de donner un cadre général à l'étude. L'autre est de caractériser la complexité d'une propriété en fonction de la classe de langages qu'elle peut induire au niveau des distributions. Nous étudions quatre propriétés dont les classes de langages associés sont de complexité croissante. Il s'agit de la conservation du nombre, de la surjectivité, de l'injectivité et de l'équicontinuité (dans ce dernier cas avec une restriction sur la forme des règles locales). Les langages associés à l'injectivité et à l'équicontinuité (dans un cadre restreint) sont ζ -rationnels¹. La complexité intrinsèque de ces langages nous semble différente, c'est pourquoi nous nous intéressons à une hiérarchie des classes de langages en fonction de leur mode d'acceptation. Ces travaux sont présentés au Chapitre V. Nous donnerons enfin plusieurs résultats de décidabilité pour les propriétés étudiées.

IV.1 Conservation du nombre

Dans de nombreux domaines des sciences et plus particulièrement en physique, on peut observer des transformations et des évolutions qui sont

1. L'Annexe A contient un rappel des notions de théorie des langages mises en jeu. L'Annexe B se focalise sur les espaces de décalage que nous rencontrons dans le cas de la conservation du nombre et de la surjectivité.

conservatives. C'est-à-dire qu'une certaine quantité demeure invariante tout au long de la transformation. Lorsqu'on utilise un ν -CA pour modéliser ces transformations, une des premières choses à vérifier est que cette quantité est préservée au cours de la dynamique. L'étude de la conservation du nombre (*number-conserving* en anglais) dans le cas des automates cellulaires classiques a déjà été menée à bien dans [12, 21, 25, 26]. Nous allons généraliser les résultats qui s'y trouvent aux $r\nu$ -CA, montrer que cette propriété reste décidable sur cette classe et caractériser le langage des distributions qui induisent des $r\nu$ -CA conservatifs.

Dans toute cette partie, on utilise un alphabet $A = \{0, \dots, s-1\}$ pour un entier $s \geq 2$. Le terme de configuration finie se réfère alors implicitement au cas des configurations 0-finies. On peut cependant généraliser les résultats qui suivent à un alphabet A quelconque dès lors que l'on munit A d'une fonction de poids $\rho : A \rightarrow G$ où G est un groupe qui sert à évaluer le poids et tel qu'il existe $a \in A$ vérifiant $\rho(a) = 0_G$, le neutre du groupe G . Des études plus précises ont été effectuées dans le cas des automates cellulaires [26].

Pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$, pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mu_n(x) = \sum_{i=-n}^n x_i$ la **charge partielle** de x entre les indices $-n$ et n , on note de même $\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x)$ la **charge globale** de x . En particulier, si x n'est pas une configuration 0-finie, $\mu(x) = \infty$. On note $\underline{0}$ la configuration nulle, c'est-à-dire la configuration qui contient 0 à tous les indices, c'est aussi la seule configuration de charge globale nulle.

Il existe deux définitions classiques pour la conservation du nombre. La première ne prend en compte que les configurations finies et impose que la charge globale d'une telle configuration soit préservée par application de H . La deuxième utilise le rapport des charges partielles d'une configuration et de son image sur un segment initial. En considérant des segments initiaux de plus en plus grands, le rapport doit tendre vers 1. Ainsi le gain ou la perte locale de quantité d'une configuration devient négligeable sur la configuration entière. On sait que ces deux notions sont équivalentes dans le cas des automates cellulaires [12, 21], nous allons montrer que c'est également le cas pour les $r\nu$ -CA.

Définition IV.1. Un ν -CA H est conservatif sur les configurations finies si pour toute configuration 0-finie x , $\mu(H(x)) = \mu(x)$.

Cette définition implique, entre autres, que l'image de toute configuration finie est finie. En effet, comme $\mu(H(\underline{0})) = \mu(\underline{0}) = 0$, $H(\underline{0}) = \underline{0}$ et 0 est un état quiescent pour toutes les règles locales qui définissent H .

Définition IV.2. Un ν -CA H est conservatif si

- (1) $H(\underline{0}) = \underline{0}$,
- (2) $\forall x \in A^{\mathbb{Z}} \setminus \{\underline{0}\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(H(x))}{\mu_n(x)} = 1$.

Remarque IV.3. La fraction $\frac{\mu_n(H(x))}{\mu_n(x)}$ de la Définition IV.2 est bien définie pour n suffisamment grand. En effet, comme $x \neq \underline{0}$, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $x_i \neq 0$ et donc $\forall n \geq |i|, \mu_n(x) \geq x_i > 0$.

En fait dans le cas des $r\nu$ -CA, la condition (2) implique la condition (1).

Proposition IV.4. Soit H un $r\nu$ -CA de rayon r , H est conservatif si et seulement si $\forall x \in A^{\mathbb{Z}} \setminus \{\underline{0}\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(H(x))}{\mu_n(x)} = 1$.

Démonstration. On note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker, c'est-à-dire

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}, \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note alors pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, δ_i la configuration telle que

$$\forall j \in \mathbb{Z}, (\delta_i)_j = \delta_{i,j}.$$

Supposons maintenant que H vérifie la condition (2) mais que $H(\underline{0}) \neq \underline{0}$.

Comme H vérifie la condition (2),

$$\forall i \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(H(\delta_i))}{\mu_n(\delta_i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(H(\delta_i)) = 1$$

et en particulier pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, $\mu(H(\delta_i)) = 1$ et donc il existe $j \in \mathbb{Z}$ tel que $H(\delta_i) = \delta_j$.

D'autre part, $H(\underline{0}) \neq \underline{0}$ donc il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $H(\underline{0})_k \neq 0$. Comme H est un $r\nu$ -CA de rayon r , $H(\delta_{k-r-1})_k = H(\delta_{k+r+1})_k = H(\underline{0})_k \neq 0$.

Ces deux faits associés implique que $H(\delta_{k-r-1}) = H(\delta_{k+r+1}) = \delta_k$. Mais alors pour la configuration x définie par

$$\forall i \in \mathbb{Z}, x_i = \delta_{k-r-1,i} + \delta_{k+r+1,i},$$

on en déduit que $H(x) = \delta_k$ d'où $1 = \mu(H(x)) \neq \mu(x) = 2$. Ce qui contredit la condition (2), on a donc bien (2) \Rightarrow (1). \square

Remarque IV.5. Dans le cas des ν -CA cette implication n'est pas vérifiée.

Démonstration. Soit H le ν -CA sur $A = \{0, 1\}$ défini par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \text{ et } x_{[-i+1,i]} = 0^{2i-1}1 \\ 0 & \text{si } i < 0 \text{ et } x_{[i,-i]} = 10^{-2i} \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le comportement de H s'explique facilement. Lorsqu'on considère une configuration x telle que $x_0 = 1$, H laisse x invariant. Dans le cas contraire, il échange $x_0 = 0$ avec le premier (en terme de distance à l'origine) 1 rencontré dans la configuration. Si cet état n'existe pas, un 1 apparaît à l'indice 0. On montre facilement que H vérifie la condition (2) de la Définition IV.2 mais que $H(\underline{0}) \neq \underline{0}$. \square

Proposition IV.6. *Soit H un ν -CA de rayon r . L'automate H est conservatif si et seulement s'il est conservatif sur les configurations finies.*

Démonstration. Supposons que H soit conservatif. Alors $H(\underline{0}) = \underline{0}$ et l'image de toute configuration finie est finie. Soit $x \neq \underline{0}$ une configuration finie, alors $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(H(x))}{\mu_n(x)} = \frac{\mu(H(x))}{\mu(x)}$ et donc $\mu(H(x)) = \mu(x)$. L'automate H est conservatif sur les configurations finies.

Réciproquement, supposons que H ne soit pas conservatif. Alors, d'après la Proposition IV.4, il existe une configuration $x \in A^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$ telle que

$$M := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(H(x))}{\mu_n(x)} > 1 \text{ ou } m := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(H(x))}{\mu_n(x)} < 1 .$$

Si x est une configuration finie, on a directement $\mu(H(x)) = \mu(x)$ et H n'est pas conservatif sur les configurations finies. Nous allons donc traiter le cas où x n'est pas une configuration finie et $M > 1$ (le cas $m < 1$ se traite de manière similaire). On notera également que le cas $M = \infty$ ne change rien à ce qui suit. Par définition de M , il existe une suite strictement croissante d'entiers positifs $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n_i}(H(x))}{\mu_{n_i}(x)} = M$. Mais comme x n'est pas finie, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{n_i}(x) = \infty$. Il existe donc $j \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_{n_j}(H(x)) > \mu_{n_j}(x) + 2r(s-1)$. Posons $n = n_j$ et définissons la configuration finie y par

$$\forall i \in \mathbb{Z}, y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mu(H(y)) &= \mu_{n+r}(H(y)) \geq \mu_{n-r}(H(y)) = \mu_{n-r}(H(x)) \geq \\ &\mu_n(H(x)) - 2r(s-1) > \mu_n(x) = \mu(y) . \end{aligned}$$

L'automate H n'est pas conservatif sur les configurations finies. \square

Remarque IV.7. Il existe des ν -CA qui sont conservatifs sur les configurations finies mais qui ne sont pas conservatifs.

Démonstration. Considérons le ν -CA H défini sur $A = \{0, 1\}$ par

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, H(x)_{2i} = x_i \text{ et } H(x)_{2i+1} = 0 .$$

On vérifie facilement que H est conservatif sur les configurations finies. Cependant pour la configuration x telle que $\forall i \in \mathbb{Z}, x_i = 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(H(x))}{\mu_n(x)} = \frac{1}{2}$$

et H n'est pas conservatif. \square

Théorème IV.8. Soit \mathcal{R} un ensemble de règles locales de rayon $r > 0$ sur A . On note \mathcal{L} l'ensemble des distributions sur \mathcal{R} qui induisent des automates conservatifs :

$$\mathcal{L} := \left\{ \theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} : H_{\theta} \text{ est conservatif} \right\} .$$

Alors \mathcal{L} est un espace de décalage de type fini (cf. Annexe B).

Démonstration. Nous allons prouver, par une double inclusion, que $\mathcal{L} = X_{\mathcal{F}}$ où

$$\mathcal{F} = \left\{ \psi \in \mathcal{R}^{2r+1} : \exists u \in A^{2r+1}, \right. \\ \left. \psi_{2r}(u) \neq u_0 + \sum_{i=0}^{2r-1} \psi_{i+1}(0^{2r-i}u_{[1,i+1]}) - \psi_i(0^{2r-i}u_{[0,i]}) \right\} .$$

Première inclusion : $\mathcal{L} \subseteq X_{\mathcal{F}}$. Soient $\theta \in \mathcal{L}$, $j \in \mathbb{Z}$ et $u \in A^{2r+1}$, on note x et y les configurations finies définies par

$$\forall i \in \mathbb{Z}, x_i = \begin{cases} u_{i-j+r} & \text{si } i \in [j-r, j+r] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{et } y_i = \begin{cases} u_{i-j+r} & \text{si } i \in [j-r+1, j+r] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

L'automate H_{θ} est conservatif donc, en particulier, conservatif sur les configurations finies d'après la Proposition IV.6. On a donc $\mu(H(x)) = \mu(x)$ et $\mu(H(y)) = \mu(y)$, soit

$$\sum_{i=0}^{2r} \theta_{j+i-2r}(0^{2r-i}u_{[0,i]}) + \sum_{i=1}^{2r} \theta_{j+i}(u_{[i,2r]}0^i) = \sum_{i=0}^{2r} u_i , \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{2r} \theta_{j+i-2r}(0^{2r-i+1}u_{[1,i]}) + \sum_{i=1}^{2r} \theta_{j+i}(u_{[i,2r]}0^i) = \sum_{i=1}^{2r} u_i . \quad (2)$$

En soustrayant (2) à (1), on obtient

$$\theta_j(u) = u_0 + \sum_{i=1}^{2r} \theta_{j+i-2r}(0^{2r-i+1}u_{[1,i]}) - \sum_{i=0}^{2r-1} \theta_{j+i-2r}(0^{2r-i}u_{[0,i]})$$

qui se réécrit

$$\theta_j(u) = u_0 + \sum_{i=0}^{2r-1} \theta_{j+i+1-2r}(0^{2r-i}u_{[1,i+1]}) - \theta_{j+i-2r}(0^{2r-i}u_{[0,i]}) .$$

Et donc, pour tout entier j , $\theta_{[j-2r,j]} \notin \mathcal{F}$. Par conséquent, $\theta \in X_{\mathcal{F}}$. Ce qui prouve que $\mathcal{L} \subseteq X_{\mathcal{F}}$.

Deuxième inclusion : $X_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{L}$. Soient $\theta \in X_{\mathcal{F}}$ et $j \in \mathbb{Z}$. Comme $\theta_{[j-2r, j]}$ n'est pas dans \mathcal{F} , on a l'égalité

$$\theta_{j+2r}(0^{2r+1}) = 0 + \sum_{i=0}^{2r-1} \theta_{j+i+1}(0^{2r+1}) - \theta_{j+i}(0^{2r+1})$$

d'où $\theta_j(0^{2r+1}) = 0$. Toutes les règles locales qui apparaissent dans θ admettent 0 comme état quiescent. L'image d'une configuration finie est une configuration finie.

Soit x une configuration finie, on a alors

$$\begin{aligned} \mu(H_{\theta}(x)) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} H_{\theta}(x)_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta_j(x_{[j-r, j+r]}) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(x_j + \sum_{i=0}^{2r-1} \theta_{j+i+1-2r}(0^{2r-i} x_{[j-r+1, j-r+i+1]}) - \right. \\ &\quad \left. \theta_{j+i-2r}(0^{2r-i} x_{[j-r, j-r+i]}) \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j + \sum_{i=0}^{2r-1} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta_{j+i+1-2r}(0^{2r-i} x_{[j-r+1, j-r+i+1]}) - \right. \\ &\quad \left. \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta_{j+i-2r}(0^{2r-i} x_{[j-r, j-r+i]}) \right) \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta_{j+i+1-2r}(0^{2r-i} x_{[j-r+1, j-r+i+1]}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta_{j+i-2r}(0^{2r-i} x_{[j-r, j-r+i]}) ,$$

et donc

$$\mu(H_{\theta}(x)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} H_{\theta}(x)_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j = \mu(x) .$$

Ceci prouve que H_{θ} est conservatif sur les configurations finies et donc, d'après la Proposition IV.6, conservatif. Ainsi $\theta \in \mathcal{L}$ et $X_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{L}$. On a la double inclusion et donc l'égalité $\mathcal{L} = X_{\mathcal{F}}$. \square

Exemple IV.9. On se donne l'ensemble $\mathcal{R} = \{f, g, h\}$ de règles locales de rayon 1 sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$ où

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in A, f(x, y, z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y = 1 \text{ et } z = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ g(x, y, z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \text{ et } y = 0, \text{ ou si } y = 1 \text{ et } z = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ h(x, y, z) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned}$$

On cherche maintenant à déterminer le langage \mathcal{L} des distributions sur \mathcal{R} qui induisent des $r\nu$ -CA conservatifs. En accord avec la preuve du Théorème IV.8, on montre que \mathcal{L} est l'espace de décalage $X_{\mathcal{F}}$ où

$$\mathcal{F} = \{fff, fgf, fhg, gff, ggf, ghg, ghh, hff, hgf, hhg, hhh\} \quad .$$

Cet espace de décalage est le même que celui qui est défini par les facteurs interdits $\{ff, gf, hh, hg\}$ et $\mathcal{L} = X_{\{ff, gf, hh, hg\}}$.

Cet exemple montre notamment qu'il existe des règles locales (ici f et h) qui ne sont pas des règles locales d'automates cellulaires conservatifs (puisque ff et hh sont des facteurs interdits) mais qui peuvent intervenir dans des distributions qui induisent des $r\nu$ -CA conservatifs.

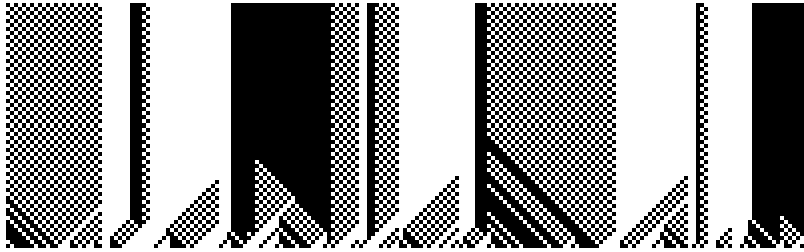


FIGURE IV.1 – Dynamique d'un $r\nu$ -CA non conservatif avec une distribution sur \mathcal{R} .

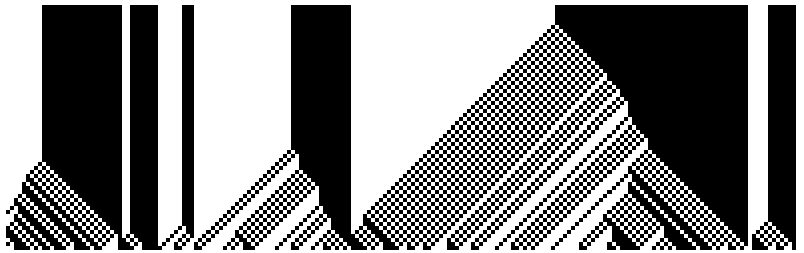


FIGURE IV.2 – Dynamique d'un $r\nu$ -CA conservatif avec une distribution sur \mathcal{R} .

Corollaire IV.10. *La conservation du nombre est décidable sur les $p\nu$ -CA.*

On peut en effet décider de la conservation du nombre sur un $r\nu$ -CA de rayon r dès que l'on peut déterminer l'ensemble des facteurs de taille $2r + 1$ d'une distribution qui le définit.

IV.2 Injectivité et surjectivité

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que, dans le cas des automates cellulaires classiques, l'injectivité implique la surjectivité et se révèle donc équivalente à la bijectivité (Théorème I.30). Nous avons également établi que cette implication restait valide dans le cas des $d\nu$ -CA dans une version affaiblie (Proposition III.4). Elle n'est cependant plus vérifiée dans le cas des $p\nu$ -CA comme le montre la Proposition II.15. Nous poursuivons cette étude dans le cas des $r\nu$ -CA. Nous nous intéressons dans un premier temps à la surjectivité puis à l'injectivité. Des techniques classiques utilisées sur les automates cellulaires seront généralisées dans le cas des $r\nu$ -CA. Elles nous permettront de montrer que, étant donné un ensemble de règles locales de même rayon sur un même alphabet, les distributions qui induisent des $r\nu$ -CA surjectifs et injectifs forment respectivement un espace de décalage sofique et un langage ζ -rationnel. Nous en déduirons des propriétés de décidabilité sur les $p\nu$ -CA.

Dans toute cette section, \mathcal{R} désigne un ensemble de règles locales de rayon $r > 0$ sur un alphabet A donné.

Définition IV.11. Une **distribution finie** sur \mathcal{R} est un mot de \mathcal{R}^* . Toute distribution finie ψ sur \mathcal{R} de taille n induit une fonction $h_\psi : A^{n+2r} \rightarrow A^n$ définie par

$$\forall u \in A^{n+2r}, \forall i \in [0, n-1], h_\psi(u)_i = \psi_i(u_{[i, i+2r]}) .$$

Cette fonction est une généralisation de la règle locale étendue qui existe pour les automates cellulaires. En effet,

$$\forall \theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}, \forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i, j \in \mathbb{Z}, i \leq j, H_\theta(x)_{[i, j]} = h_{\theta_{[i, j]}}(x_{[i-r, j+r]}) .$$

Proposition IV.12. Soit θ une distribution sur \mathcal{R} , H_θ est surjectif si et seulement si $h_{\theta_{[i, j]}}$ est surjective pour tous entiers $i \leq j$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition I.24. \square

Corollaire IV.13. Le langage \mathcal{L} des distributions sur \mathcal{R} qui induisent des $r\nu$ -CA surjectifs,

$$\mathcal{L} := \left\{ \theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} : H_\theta \text{ est surjectif} \right\} ,$$

est un espace de décalage.

Démonstration. On choisit l'ensemble

$$\{\psi \in \mathcal{R}^* : h_\psi \text{ n'est pas surjectif}\}$$

comme ensemble de facteurs interdits. \square

Il nous reste à caractériser plus précisément cet espace de décalage. Nous allons pour ce faire introduire une généralisation des graphes de De Bruijn [19]. Dans le contexte des automates cellulaires, les graphes de De Bruijn ont été introduits pour étudier la décidabilité de la surjectivité et de l'injectivité et obtenir des algorithmes de décision efficaces [7, 61]. Un graphe de De Bruijn permet de suivre à la fois une configuration et son image par un automate cellulaire. Dans notre variante, on suit une configuration et son image par toute une famille de $r\nu$ -CA.

Définition IV.14. Le **graphe de De Bruijn** de \mathcal{R} est le graphe étiqueté $\mathcal{G} = (V, E)$ où $V = A^{2r}$ et

$$E = \left\{ (au, (f, f(au)), ub) : a, b \in A, u \in A^{2r-1}, f \in \mathcal{R} \right\} .$$

Exemple IV.15. Considérons l'ensemble de règles locales $\mathcal{R} = \{id, \oplus\}$ de rayon 1 sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$ définies par

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in A, id(x, y, z) &= y \\ \oplus(x, y, z) &= x + z \pmod{2} . \end{aligned}$$

Le graphe de De Bruijn de \mathcal{R} est représenté sur la Figure IV.3.

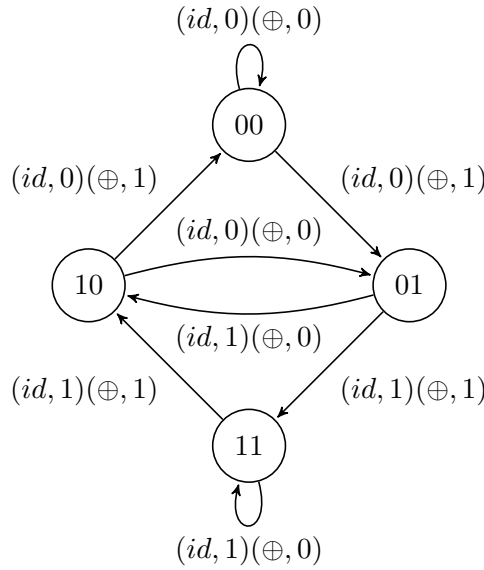


FIGURE IV.3 – Graphe de De Bruijn de $\{id, \oplus\}$.

Proposition IV.16. Soient $n \in \mathbb{N}$, $u \in A^n$ et $\psi \in \mathcal{R}^n$. Il existe un chemin dans le graphe de De Bruijn \mathcal{G} de \mathcal{R} étiqueté par (ψ, u) si et seulement si $h_\psi^{-1}(u) \neq \emptyset$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un chemin $(a_i v_i, (\psi_i, u_i), v_i b_i)_{i \in [0, n-1]}$ dans \mathcal{G} avec pour tout entier $i \in [0, n-1]$, $a_i, b_i \in A$ et $v_i \in A^{2r-1}$. On définit le mot w de taille $n + 2r$ par

$$w_{[0, 2r-1]} = a_0 v_0 \text{ et } \forall i \in [0, n-1], w_{2r+i} = b_i .$$

On a alors par définition de \mathcal{G} ,

$$\forall i \in [0, n-1], \psi_i(w_{[i, i+2r]}) = \psi_i(a_i v_i b_i) = u_i$$

et donc $h_\psi(w) = u$.

Réciproquement, s'il existe $v \in A^{n+2r}$ tel que $h_\psi(v) = u$, alors

$$(v_{[i, i+2r-1]}, (\psi_i, u_i), v_{[i+1, i+2r]})_{i \in [0, n-1]}$$

est un chemin étiqueté par (ψ, u) dans \mathcal{G} . □

Théorème IV.17. *Le langage \mathcal{L} des distributions sur \mathcal{R} qui induisent des rv -CA surjectifs est un espace de décalage sofique.*

Démonstration. Nous savons déjà (Corollaire IV.13) que $\mathcal{L} = X_{\mathcal{F}}$ où

$$\mathcal{F} = \{ \psi \in \mathcal{R}^* : h_\psi \text{ n'est pas surjectif} \} .$$

Il nous suffit donc de montrer que \mathcal{F} est un langage rationnel (Proposition B.8). On note $\mathcal{G} = (V, E)$ le graphe de De Bruijn de \mathcal{R} . On considère l'automate fini $\mathcal{A} = (\mathcal{R} \times A, V, E, V, V)$. C'est en fait le graphe \mathcal{G} considéré comme un automate dans lequel tous les sommets sont à la fois initiaux et finaux. Tout chemin dans \mathcal{G} est donc un chemin acceptant dans \mathcal{A} et tout chemin de \mathcal{A} est un chemin de \mathcal{G} . On en déduit par la Proposition IV.16 que le langage reconnu par \mathcal{A} est

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{ (\psi, u) \in (\mathcal{R} \times A)^* : h_\psi^{-1}(u) \neq \emptyset \} .$$

Comme les langages reconnaissables sont clos par complémentation, il existe un automate fini $\mathcal{A}^c = (\mathcal{R} \times A, Q, T, I, F)$ qui reconnaît le langage complémentaire de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}^c) = \mathcal{L}(\mathcal{A})^c = \{ (\psi, u) \in (\mathcal{R} \times A)^* : h_\psi^{-1}(u) = \emptyset \} .$$

On pose maintenant $\mathcal{A}' = (\mathcal{R}, Q, T', I, F)$ où

$$T' = \{ (q, f, q') \in Q \times \mathcal{R} \times Q : \exists a \in A, (q, (f, a), q') \in T \} .$$

C'est en fait le même automate que \mathcal{A}^c dont la deuxième composante des étiquettes a été retirée. En particulier, $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{A}')$ si et seulement s'il existe

un mot $u \in A^*$ tel que $(\psi, u) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^c)$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{A}') &= \{\psi \in \mathcal{R}^* : \exists u \in A^*, (\psi, u) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^c)\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{R}^* : \exists u \in A^*, h_\psi^{-1}(u) = \emptyset\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{R}^* : h_\psi \text{ n'est pas surjectif}\} \\ &= \mathcal{F}. \end{aligned}$$

L'automate \mathcal{A}' reconnaît le langage \mathcal{F} qui est donc rationnel (Théorème A.9). Ceci prouve que \mathcal{L} est un espace de décalage sofique. \square

Exemple IV.18. La preuve de la Proposition IV.17 donne une manière algorithmique de déterminer le langage des facteurs interdits de \mathcal{L} . Ainsi en reprenant l'Exemple IV.15, on détermine que les facteurs interdits sont ceux reconnus par l'automate représenté sur la Figure IV.4.

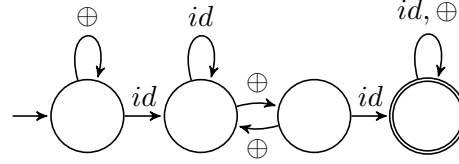


FIGURE IV.4 – Automate reconnaissant \mathcal{F} pour $\mathcal{R} = \{id, \oplus\}$.

On a donc $\mathcal{F} = \mathcal{R}^*id \oplus (\oplus\oplus)^*id\mathcal{R}^*$ et \mathcal{L} est donc le sous-shift pair.

Corollaire IV.19. *La surjectivité est décidable sur les $p\nu$ -CA.*

Démonstration. Soit H un $p\nu$ -CA sur \mathcal{R} . On peut supposer sans perte de généralité que H est de période structurelle 1 (Proposition II.10). On note alors θ une distribution sur \mathcal{R} qui définit H , n son seuil de perturbation, f sa règle par défaut gauche et g sa règle par défaut droite. L'automate H est surjectif si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}, h_{f^k\theta_{[-n,n]}g^k}$ est surjectif. C'est-à-dire si $f^*\theta_{[-n,n]}g^* \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Il est connu que l'on peut décider si un langage rationnel est vide, ce qui permet de conclure. \square

Nous nous intéressons maintenant à l'injectivité des $r\nu$ -CA. Pour ce faire, nous allons étendre les méthodes utilisées dans [61]. L'injectivité se réduit alors à un problème proche de celui de l'ambiguïté dans un automate. Un automate est dit ambigu lorsqu'un mot peut être reconnu par au moins deux chemins acceptants distincts (à décalage près). Initialement introduite pour démontrer la décidabilité de l'injectivité sur les automates cellulaires (en dimension 1), l'extension de cette méthode va nous permettre de caractériser le langage des distributions qui induisent des $r\nu$ -CA injectifs. Nous utilisons pour cela des graphes produits. Le produit de deux graphes est le graphe

formé par les couples de sommets des graphes initiaux, une arête relie deux tels couples si leurs composantes étaient déjà reliées par une arête avec la même étiquette dans leur graphe initial respectif.

Définition IV.20. Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ le graphe de De Bruijn de \mathcal{R} . Le **graphe produit** de \mathcal{R} est le graphe $\mathcal{P} = (V^2, E')$ où

$$E' = \left\{ ((u, u'), f, (v, v')) \in V^2 \times \mathcal{R} \times V^2 : \right. \\ \left. \exists a \in A, (u, (f, a), v) \text{ et } (u', (f, a), v') \in E \right\} .$$

Dans la suite, nous garderons les notations $\mathcal{G} = (V, E)$ et $\mathcal{P} = (V^2, E')$ pour le graphe de De Bruijn et le graphe produit de \mathcal{R} .

Exemple IV.21. Dans la continuité de l'Exemple IV.15, le graphe produit pour les règles $\{id, \oplus\}$ est représenté sur la Figure IV.5. A la différence d'un graphe de De Bruijn, un graphe produit n'est pas forcément connexe.

Proposition IV.22. Soient θ une distribution sur \mathcal{R} et $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$. Alors $H_{\theta}(x) = H_{\theta}(y)$ si et seulement si la suite

$$\left((x_{[i-r, i+r-1]}, y_{[i-r, i+r-1]}), \theta_i, (x_{[i-r+1, i+r]}, y_{[i-r+1, i+r]}) \right)_{i \in \mathbb{Z}}$$

est un chemin bi-infini dans \mathcal{P} .

Démonstration. Supposons que $H_{\theta}(x) = H_{\theta}(y)$ et notons z cette configuration. On sait alors que les suites

$$(x_{[i-r, i+r-1]}, (\theta_i, z_i), x_{[i-r+1, i+r]})_{i \in \mathbb{Z}} \text{ et } (y_{[i-r, i+r-1]}, (\theta_i, z_i), y_{[i-r+1, i+r]})_{i \in \mathbb{Z}}$$

sont des chemins bi-infinis dans le graphe de De Bruijn de \mathcal{R} et donc

$$\left((x_{[i-r, i+r-1]}, y_{[i-r, i+r-1]}), \theta_i, (x_{[i-r+1, i+r]}, y_{[i-r+1, i+r]}) \right)_{i \in \mathbb{Z}}$$

est un chemin bi-infini dans \mathcal{P} .

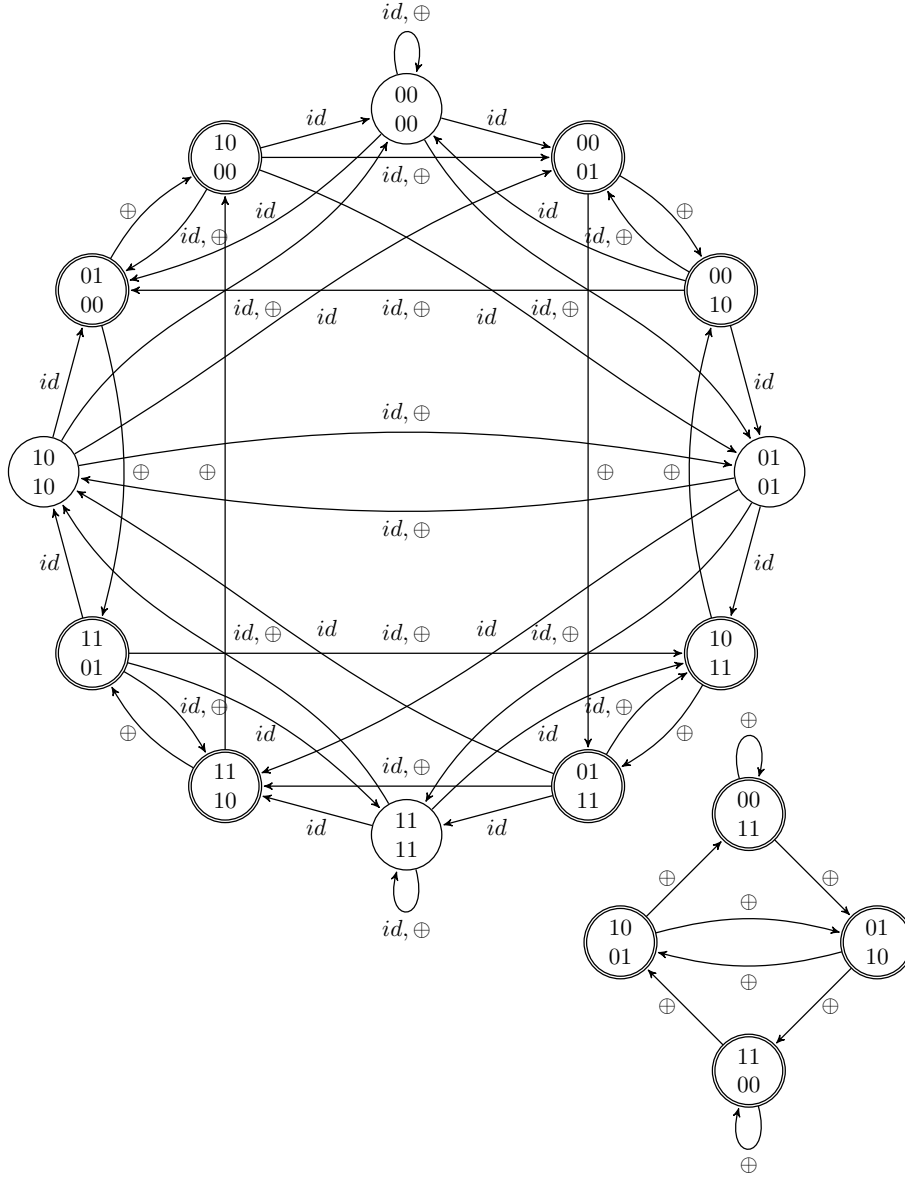
Supposons maintenant que

$$\left((x_{[i-r, i+r-1]}, y_{[i-r, i+r-1]}), \theta_i, (x_{[i-r+1, i+r]}, y_{[i-r+1, i+r]}) \right)_{i \in \mathbb{Z}}$$

soit un chemin bi-infini dans \mathcal{P} . Il existe donc $z \in A^{\mathbb{Z}}$ tel que

$$(x_{[i-r, i+r-1]}, (\theta_i, z_i), x_{[i-r+1, i+r]})_{i \in \mathbb{Z}} \text{ et } (y_{[i-r, i+r-1]}, (\theta_i, z_i), y_{[i-r+1, i+r]})_{i \in \mathbb{Z}}$$

sont des chemins bi-infinis dans le graphe de De Bruijn de \mathcal{R} . Par définition, on a alors $H_{\theta}(x) = H_{\theta}(y) = z$. \square

FIGURE IV.5 – Graphe produit de $\{id, \oplus\}$.

Théorème IV.23. *Le langage \mathcal{L} des distributions sur \mathcal{R} qui induisent des rv -CA injectifs,*

$$\mathcal{L} := \left\{ \theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} : H_{\theta} \text{ est injectif} \right\} ,$$

est un langage ζ -rationnel.

Démonstration. Soit θ une distribution sur \mathcal{R} . L'automate H_{θ} n'est pas injectif si et seulement s'il existe deux configurations x et y distinctes telles

que $H_\theta(x) = H_\theta(y)$. Donc d'après la Proposition IV.22, H_θ n'est pas injectif si et seulement s'il existe un chemin bi-infini dans \mathcal{P} qui passe par un sommet de la forme (u, v) avec $u \neq v$. En notant $D = \{(u, u) : u \in V\}$, on en déduit que le langage complémentaire de \mathcal{L} est le langage

$$\mathcal{L}^c = \left\{ \theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} : \exists \alpha \in (V^2)^{\mathbb{Z}} \setminus D^{\mathbb{Z}}, \right. \\ \left. (\alpha_i, \theta_i, \alpha_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} \text{ est un chemin dans } \mathcal{P} \right\}.$$

Notons, pour tout $(u, v) \in V^2$, $\mathcal{A}_{u,v} = (\mathcal{R}, V^2, E', (u, v), V^2)$ et $\mathcal{A}'_{u,v} = (\mathcal{R}, V^2, E'_{inv}, (u, v), V^2)$ où

$$E'_{inv} = \left\{ (\alpha, f, \beta) \in V^2 \times \mathcal{R} \times V^2 : (\beta, f, \alpha) \in E' \right\}.$$

Notons $\mathcal{L}_{u,v}$ et $\mathcal{L}'_{u,v}$ les ω -langages reconnus respectivement par $\mathcal{A}_{u,v}$ et $\mathcal{A}'_{u,v}$. On a alors

$$\mathcal{L}^c = \bigcup_{(u,v) \in V^2 \setminus D} \widetilde{L'_{u,v}} L_{u,v},$$

ce qui prouve que \mathcal{L}^c est ζ -rationnel. Comme la classe des langages ζ -rationnels est clos par complémentation, \mathcal{L} est ζ -rationnel. \square

Corollaire IV.24. *L'injectivité est décidable sur les $p\nu$ -CA.*

Démonstration. Soit H un $p\nu$ -CA sur \mathcal{R} . On peut supposer sans perte de généralité que H est de période structurelle 1 (Proposition II.10). On note alors θ une distribution sur \mathcal{R} qui définit H , n son seuil de perturbation, f sa règle par défaut gauche et g sa règle par défaut droite. On note \mathcal{L} le langage des distributions sur \mathcal{R} qui induisent des $r\nu$ -CA injectifs.

Le langage $\widetilde{f^\omega \theta_{[-n,n]}} g^\omega$ est ζ -rationnel donc le langage $\widetilde{f^\omega \theta_{[-n,n]}} g^\omega \cap \mathcal{L}$ est ζ -rationnel aussi. L'automate H est injectif si et seulement si le langage $\widetilde{f^\omega \theta_{[-n,n]}} g^\omega \cap \mathcal{L}$ n'est pas vide, ce qui est un problème décidable sur les langages ζ -rationnels. \square

IV.3 Equicontinuité et sensibilité pour les $r\nu$ -CA additifs

Dans cette section, nous nous intéressons à certaines propriétés dynamiques des $r\nu$ -CA : l'équicontinuité et la sensibilité. Comme précédemment, nous allons tenter de caractériser les distributions qui induisent des $r\nu$ -CA vérifiant ces propriétés. Il est connu que, dans le cas des automates cellulaires, l'équicontinuité, la presque-équicontinuité et la sensibilité sont indécidables dans le cas général [22]. Par contre, si on se restreint à un sous-ensemble de règles locales dites additives, ces propriétés deviennent décidables [44]. Nous étudions ici le cas des distributions définies sur un ensemble fini de règles locales additives et cherchons à caractériser celles qui

induisent des ν -CA sensibles ou équicontinus. Nous verrons en effet que ces deux propriétés sont liées à la présence de signaux dans la dynamique et qu'il y a une dichotomie selon que le signal peut ou non se propager.

Dans toute cette section, nous considérons un alphabet A muni d'une structure d'anneau commutatif fini. L'alphabet est muni de deux opérations internes $+$: $A \times A \rightarrow A$ et \cdot : $A \times A \rightarrow A$. L'opération $+$ est associative et commutative, elle admet un élément neutre noté 0 et tout élément a de A admet un inverse par $+$ noté $-a$; l'opération \cdot est associative et commutative, elle admet un élément neutre noté 1 et est distributive par rapport à l'opération $+$, lorsqu'un élément a de A admet un inverse pour \cdot , il est noté a^{-1} . On peut résumer ces propriétés par :

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in A, (a + b) + c &= a + (b + c) , \\ a + b &= b + a , \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) , \\ a \cdot b &= b \cdot a , \\ a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c , \\ a + 0 &= a , \\ a + (-a) &= 0 , \\ a \cdot 1 &= a . \end{aligned}$$

De manière usuelle, l'opération \cdot est prioritaire sur l'opération $+$ ce qui permet de simplifier le parenthésage. De même, l'associativité permet d'ignorer certaines parenthèses.

La structure d'anneau $(A, +, \cdot)$ induit naturellement une structure d'algèbre sur A^n pour tout entier $n > 0$ ainsi que sur $A^{\mathbb{Z}}$. Les opérations internes sont l'application de $+$ et \cdot membre à membre et l'opération externe et l'application d'un élément de A à tous les membres d'un élément de A^n ou $A^{\mathbb{Z}}$. Ces opérations sont encore notées $+$ et \cdot par abus de notation. Enfin pour u et v dans A^n , uv dénote à nouveau la concaténation de u et de v , tandis que la multiplication $u \cdot v$ est explicitement dénotée avec le symbole \cdot (ou avec le symbole \prod).

On reprend les notations $\delta_{i,j}$ et δ_i définies à la page 47 et on note $\underline{0}$ la configuration telle que

$$\forall i \in \mathbb{Z}, 0_i = 0 .$$

Définition IV.25. Une règle locale f de rayon r sur A est **linéaire** s'il existe $\lambda \in A^{2r+1}$ tel que

$$\forall u \in A^{2r+1}, f(u) = \sum_{i \in [0, 2r]} \lambda_i \cdot u_i .$$

Un ν -CA est **linéaire** si on peut le définir par une distribution qui n'est composée que de règles linéaires.

Proposition IV.26. *Soit H un ν -CA, H est linéaire si et seulement si H est un endomorphisme du module $(A^{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ (i.e. une application linéaire).*

Démonstration. Supposons que H soit linéaire. Soient $a \in A$, x et $y \in A^{\mathbb{Z}}$ et $i \in \mathbb{Z}$. Comme H est linéaire, il existe $r \geq 0$ et $\lambda \in A^{2r+1}$ tels que

$$\forall z \in A^{\mathbb{Z}}, H(z)_i = \sum_{j \in [0, 2r]} \lambda_i \cdot z_{i-r+j} .$$

On a alors

$$\begin{aligned} H(a \cdot x + y)_i &= \sum_{j \in [0, 2r]} \lambda_i \cdot (a \cdot x_{i-r+j} + y_{i-r+j}) \\ &= a \cdot \sum_{j \in [0, 2r]} \lambda_i \cdot x_{i-r+j} + \sum_{j \in [0, 2r]} \lambda_i \cdot y_{i-r+j} \\ &= a \cdot H(x)_i + H(y)_i . \end{aligned}$$

Et donc

$$\forall a \in A, \forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, H(a \cdot x + y) = a \cdot H(x) + H(y) .$$

Supposons désormais que H soit un endomorphisme de $(A, +, \cdot)$. Soient θ une distribution définissant H et $i \in \mathbb{Z}$. On note r_i le rayon de θ_i et on définit le mot $\lambda_i \in A^{2r_i+1}$ par

$$\forall j \in [0, 2r_i], (\lambda_i)_j = \theta_i(0^j 10^{2r_i-j}) .$$

On note alors θ'_i la règle locale linéaire définie par λ_i .

Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$,

$$\begin{aligned} H(x)_i &= H \left(\sum_{j \in [0, 2r_i]} x_{i-r_i+j} \cdot \delta_{i-r_i+j} + x - \sum_{j \in [0, 2r_i]} x_{i-r_i+j} \cdot \delta_{i-r_i+j} \right)_i \\ &= \sum_{j \in [0, 2r_i]} x_{i-r_i+j} \cdot H(\delta_{i-r_i+j})_i + H \left(x - \sum_{j \in [0, 2r_i]} x_{i-r_i+j} \cdot \delta_{i-r_i+j} \right)_i \\ &= \sum_{j \in [0, 2r_i]} x_{i-r_i+j} \cdot \theta_i(\delta_{i-r_i+j}[i-r_i, i+r_i]) \\ &\quad + \theta_i \left(\left(x - \sum_{j \in [0, 2r_i]} x_{i-r_i+j} \cdot \delta_{i-r_i+j} \right)_{[i-r_i, i+r_i]} \right) \\ &= \sum_{j \in [0, 2r_i]} x_{i-r_i+j} \cdot \theta_i(0^j 10^{2r_i-j}) + \theta_i(0^{2r_i+1}) \\ &= \sum_{j \in [0, 2r_i]} x_{i-r_i+j} \cdot (\lambda_i)_j + \theta_i(\underline{0}_{[i-r_i, i+r_i]}) \\ &= \theta'_i(x_{[i-r_i, i+r_i]}) + H(\underline{0})_i = \theta'_i(x_{[i-r_i, i+r_i]}) \end{aligned}$$

On en déduit que $H = H_{\theta'}$ et donc H est linéaire. □

Proposition IV.27. *Soit H un ν -CA linéaire. Alors H est sensible si et seulement si H n'est pas équicontinu.*

Démonstration. Pour tout entier $k \geq 0$, H^k est un ν -CA linéaire donc, pour tout entier i , il existe $r_{i,k} \geq 0$ et $\lambda_{i,k} \in A^{2r_{i,k}+1}$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z}, H^k(x)_i = \sum_{j \in [0, 2r_{i,k}]} \lambda_{i,k} \cdot x_{i-r_{i,k}+j} .$$

On peut supposer sans perte de généralité que pour tous entiers $k \geq 0$ et i , $(\lambda_{i,k})_0 \neq 0$.

Supposons alors que pour tout entier i , il existe un entier $M_i \geq 0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, r_{i,k} \leq M_i .$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $m = n + \max (M_i : i \in [-n, n])$, et x et y deux configurations tels que $x_{[-m, m]} = y_{[-m, m]}$. On a alors

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in [-n, n], H^k(x)_i &= \sum_{j \in [0, 2r_{i,k}]} \lambda_{i,k} \cdot x_{i-r_{i,k}+j} = \\ &= \sum_{j \in [0, 2r_{i,k}]} \lambda_{i,k} \cdot y_{i-r_{i,k}+j} = H^k(y)_i \end{aligned}$$

et $H^k(x)_{[-n, n]} = H^k(y)_{[-n, n]}$. Ce qui prouve que H est équicontinu.

Supposons à l'inverse qu'il existe un entier i tel que

$$\forall M \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, r_{i,k} > M .$$

Soient $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et $m \in \mathbb{N}$, alors il existe un entier $k \geq 0$ tel que $r_{i,k} > 2|i| + 1 + m$. Posons $y = x + \delta_{i-r_{i,k}}$, on a alors $x_{[-m, m]} = y_{[-m, m]}$ mais

$$H^k(y)_i = H^k(x)_i + H^k(\delta_{i-r_{i,k}})_i = H^k(x)_i + (\lambda_{i,k})_0 \neq H^k(x)_i .$$

Ce qui prouve que H est sensible de constante de sensibilité $2^{-|i|}$. □

Cette proposition étend un résultat classique sur les automates cellulaires linéaires. Tout automate cellulaire linéaire non-sensible est équicontinu. La preuve de cette proposition montre également que, pour être sensible, il faut et il suffit qu'un signal arbitrairement loin (une configuration de la forme δ_i avec $|i|$ grand) puisse se propager en direction du centre au cours de la dynamique. Plus précisément, nous avons le Corollaire IV.28.

Corollaire IV.28. *Un ν -CA H linéaire est sensible si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists j \in \mathbb{Z}, |j| > i, \exists k \in \mathbb{N}, H^k(\delta_j)_{[-n, n]} \neq 0^{2n+1} .$$

Nous nous donnons maintenant un ensemble \mathcal{R} de règles locales de rayon $r \geq 0$ sur A et nous considérons les $r\nu$ -CA définis par une distribution sur \mathcal{R} .

Remarque IV.29. Soit $\psi \in \mathcal{R}^*$ une distribution finie de taille n , la fonction $h_\psi : A^{n+2r} \rightarrow A^n$ (Définition IV.11) est linéaire,

$$\forall u, v \in A^r, \forall a \in A, h_\psi(u + a \cdot v) = h_\psi(v) + a \cdot h_\psi(v) .$$

Définition IV.30. Un **mur droit** est une distribution finie $\psi \in \mathcal{R}^*$ de taille $n \geq r$ telle que, pour tout mot $v \in A^r$, la suite $u_\psi(v) : \mathbb{N} \rightarrow A^n$ définie par

$$\begin{aligned} u_\psi(v)_0 &= 0^n \\ u_\psi(v)_1 &= h_\psi(0^r u_\psi(v)_0 v) \\ u_\psi(v)_{k+1} &= h_\psi(0^r u_\psi(v)_k 0^r) \text{ pour tout entier } k > 1 \end{aligned}$$

vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, (u_\psi(v)_k)_{[0, r-1]} = 0^r$. On définit les **murs gauches** de manière symétrique.

Remarque IV.31. Pour toute distribution finie ψ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $v \rightarrow u_\psi(v)_k$ qui, à tout mot $v \in A^r$, associe le k -ième terme de la suite $u_\psi(v)$, est linéaire (car h_ψ est linéaire), c'est-à-dire

$$\forall v, w \in A^r, \forall a \in A, u_\psi(v + a \cdot w)_k = u_\psi(v)_k + a \cdot u_\psi(w)_k .$$

On peut donc remplacer la condition

$$\forall v \in A^r, \forall k \in \mathbb{N}, (u_\psi(v)_k)_{[0, r-1]} = 0^r$$

par la condition équivalente

$$\forall i \in [0, r-1], \forall k \in \mathbb{N}, (u_\psi(0^i 10^{r-1-i})_k)_{[0, r-1]} = 0^r .$$

Concrètement, la suite $u_\psi(v)$ correspond à l'itération de h_ψ où on complète les mots obtenus par des 0 (sauf pour la première itération). On peut voir la suite des mots obtenus comme un morceau de dynamique d'un ν -CA (Figure IV.6). Un mur droit correspond donc à une distribution finie pour laquelle tout signal v venant de la droite n'influe pas sur la partie gauche au cours de la dynamique, le signal est bloqué. Ainsi, lorsqu'un mur droit ψ sera un facteur d'une distribution, la dynamique à gauche de ψ pour l'automate induit est indépendante de toute la partie de la configuration initiale à droite du mur. Donc, une colonne de la dynamique comprise entre un mur gauche et un mur droit ne dépendra que d'une portion finie de la configuration initiale. Nous allons désormais expliciter et démontrer cette assertion de manière formelle.

Remarque IV.32. Toute propriété sur les murs droits a son équivalent sur les murs gauches par symétrie.

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> ← Fixe Application de h_ψ Fixe → </div>		
0^r	$0^n = u_\psi(v)_0$	v
0^r	$u_\psi(v)_1$	0^r
0^r	$u_\psi(v)_2$	0^r
\vdots	\vdots	\vdots
0^r	$u_\psi(v)_k$	0^r
\vdots	\vdots	\vdots

FIGURE IV.6 – La suite $u_\psi(v)$.

Lemme IV.33. *Pour tout mur droit ψ et tout $f \in \mathcal{R}$, $f\psi$ est un mur droit.*

Démonstration. Soit $v \in A^r$, notons $n \geq r$ la taille de ψ . On montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{f\psi}(v)_k = 0u_\psi(v)_k .$$

L'égalité est vraie par définition pour $k = 0$, $u_{f\psi}(v)_0 = 0^{n+1} = 0u_\psi(v)_0$. Pour $k = 1$, on a $u_{f\psi}(v)_1 = h_{f\psi}(0^{n+r+1}v) = f(0^{2r+1})h_\psi(0^{n+r}v) = 0u_\psi(v)_1$.

Supposons maintenant que $u_{f\psi}(v)_k = 0u_\psi(v)_k$ pour $k > 0$, alors

$$\begin{aligned} u_{f\psi}(v)_{k+1} &= h_{f\psi}(0^r u_{f\psi}(v)_k 0^r) \\ &= h_{f\psi}(0^{r+1} u_\psi(v)_k 0^r) \\ &= f(0^{2r+1}) h_\psi(0^r u_\psi(v)_k 0^r) \\ &= 0u_\psi(v)_{k+1} . \end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{f\psi}(v)_k = 0u_\psi(v)_k ,$$

et, en particulier,

$$\forall k \in \mathbb{N}, (u_{f\psi}(v)_k)_{[0, r-1]} = 0(u_\psi(v)_k)_{[0, r-2]} = 0^r .$$

La distribution finie $f\psi$ est bien un mur droit. \square

Lemme IV.34. *Pour tout mur droit ψ et tout $f \in \mathcal{R}$, ψf est un mur droit.*

Démonstration. Soit $v \in A^r$, notons $n \geq r$ la taille de ψ , notons de même pour tout entier $k \geq 0$, $\alpha_k = (u_\psi f(v)_k)_n$, $\beta_k = \alpha_k 0^{r-1}$ et $\gamma = 0v_{[0, r-2]}$. Nous montrons que

$$u_{\psi f}(v)_k = \left(u_\psi(\gamma)_k + \sum_{i=1}^{k-1} u_\psi(\beta_{k-i})_i \right) \alpha_k .$$

Pour $k = 0$, on a

$$u_{\psi f}(v)_0 = 0^{n+1} = u_{\psi}(\gamma)_0 \alpha_0 .$$

Pour $k = 1$, on a de même

$$u_{\psi f}(v)_1 = h_{\psi f}(0^r u_{\psi f}(v)_0 v) = h_{\psi f}(0^{n+r+1} v) = h_{\psi}(0^{n+r} \gamma) \alpha_1 = u_{\psi}(\gamma)_1 \alpha_1 .$$

Prenons $k > 0$ tel que

$$u_{\psi f}(v)_k = \left(u_{\psi}(\gamma)_k + \sum_{i=1}^{k-1} u_{\psi}(\beta_{k-i})_i \right) \alpha_k .$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_{\psi f}(v)_{k+1} &= h_{\psi f}(0^r u_{\psi f}(v)_k 0^r) \\ &= h_{\psi f} \left(0^r \left(u_{\psi}(\gamma)_k + \sum_{i=1}^{k-1} u_{\psi}(\beta_{k-i})_i \right) \alpha_k 0^r \right) . \end{aligned}$$

En réécrivant cette équation à l'aide des notations introduites précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} u_{\psi f}(v)_{k+1} &= h_{\psi} \left(0^r \left(u_{\psi}(\gamma)_k + \sum_{i=1}^{k-1} u_{\psi}(\beta_{k-i})_i \right) \beta_k \right) \alpha_{k+1} \\ &= h_{\psi} \left(0^r u_{\psi}(\gamma)_k 0^r + \sum_{i=1}^{k-1} 0^r u_{\psi}(\beta_{k-i})_i 0^r + 0^{n+r} \beta_k \right) \alpha_{k+1} . \end{aligned}$$

Puis, par linéarité de h_{ψ} (Remarque IV.29),

$$\begin{aligned} u_{\psi f}(v)_{k+1} &= \left(h_{\psi}(0^r u_{\psi}(\gamma)_k 0^r) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^{k-1} h_{\psi}(0^r u_{\psi}(\beta_{k-i})_i 0^r) + h_{\psi}(0^{n+r} \beta_k) \right) \alpha_{k+1} \\ &= \left(u_{\psi}(\gamma)_{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} u_{\psi}(\beta_{k-i})_{i+1} + u_{\psi}(\beta_k)_1 \right) \alpha_{k+1} \\ &= \left(u_{\psi}(\gamma)_{k+1} + \sum_{i=1}^k u_{\psi}(\beta_{k+1-i})_i \right) \alpha_{k+1} . \end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{\psi f}(v)_k = \left(u_{\psi}(\gamma)_k + \sum_{i=1}^{k-1} u_{\psi}(\beta_{k-i})_i \right) \alpha_k ,$$

et, en particulier, que

$$\forall k \in \mathbb{N}, (u_{\psi f}(v)_k)_{[0, r-1]} = (u_{\psi}(\gamma)_k)_{[0, r-1]} + \sum_{i=1}^{k-1} (u_{\psi}(\beta_{k-i})_i)_{[0, r-1]} = 0^r .$$

La distribution finie ψf est bien un mur droit. \square

Proposition IV.35. *Si ψ est un mur droit alors, pour toutes distributions finies $\psi', \psi'' \in \mathcal{R}^*$, $\psi' \psi \psi''$ est un mur droit.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des Lemmes IV.33 et IV.34. \square

Le Lemme IV.36 établit le lien entre une distribution θ et la suite u_{ψ} pour ψ facteur de θ . Il nous permettra par la suite de montrer que la présence de murs est liée à l'équicontinuité de l'automate induit par θ .

Lemme IV.36. *Soient $\theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$, $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et m et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $m > n$ et $x_{[n+1, m]} = 0^{m-n}$. On note $\psi = \theta_{[n+1, m]}$ et, pour tout entier $i \geq 0$, $\alpha_i = H_{\theta}^i(x)_{[m+1, m+r]}$. Alors, pour tout entier $k \geq 0$, la proposition*

$$P(k) := \left(\forall i \in [0, k], H_{\theta}^i(x)_{[n-r+1, n]} = 0^r \right) \Rightarrow H_{\theta}^k(x)_{[n+1, m]} = \sum_{j=0}^k u_{\psi}(\alpha_{k-j})_j$$

est vraie.

Démonstration. La proposition $P(0)$ est vraie :

$$H_{\theta}^0(x)_{[n+1, m]} = x_{[n+1, m]} = 0^{m-n} = (u_{\psi}(\alpha_0))_0 .$$

Supposons que $P(k)$ soit vraie pour un entier $k \geq 0$ et que, pour tout entier $i \in [0, k]$, $H_{\theta}^i(x)_{[n-r+1, n]} = 0^r$. Alors, par hypothèse de récurrence, $H_{\theta}^k(x)_{[n+1, m]} = \sum_{j=0}^k u_{\psi}(\alpha_{k-j})_j$. D'autre part,

$$\begin{aligned} H_{\theta}^{k+1}(x)_{[n+1, m]} &= h_{\psi}(H_{\theta}^k(x)_{[n-r+1, m+r]}) \\ &= h_{\psi} \left(0^r \left(\sum_{i=0}^k u_{\psi}(\alpha_{k-i})_i \right) \alpha_k \right) \\ &= h_{\psi} \left(0^{n+2r} + 0^{n+r} \alpha_k + \sum_{i=1}^k 0^r u_{\psi}(\alpha_{k-i})_i 0^r \right) \\ &= h_{\psi} \left(0^{n+2r} + 0^r u_{\psi}(\alpha_k)_0 \alpha_k + \sum_{i=1}^k 0^r u_{\psi}(\alpha_{k-i})_i 0^r \right) . \end{aligned}$$

Ensuite, par linéarité de h_ψ (Remarque IV.29), on obtient

$$\begin{aligned} H_\theta^{k+1}(x)_{[n+1,m]} &= 0^n + h_\psi(0^r u_\psi(\alpha_k)_0 \alpha_k) + \sum_{i=1}^k h_\psi(0^r u_\psi(\alpha_{k-i})_i 0^r) \\ &= u_\psi(\alpha_{k+1})_0 + u_\psi(\alpha_k)_1 + \sum_{i=1}^k u_\psi(\alpha_{k-i})_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} u_\psi(\alpha_{k+1-i})_i . \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $P(k+1)$ est vraie. On a donc montré par récurrence que $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. \square

En appliquant ce résultat dans le cas où ψ est un mur droit et x une configuration qui ne contient que des 0 jusqu'à l'indice m , on démontre le Corollaire IV.37.

Corollaire IV.37. *Soient $\theta \in \mathcal{R}^\mathbb{Z}$, $x \in A^\mathbb{Z}$, et m et n des entiers tels que $m \geq n+r$ et $\forall i \leq m, x_i = 0$. On note $\psi = \theta_{[n+1,m]}$ et, pour tout entier $i \geq 0$, $\alpha_i = H_\theta^i(x)_{[m+1,m+r]}$. Alors,*

$$\begin{aligned} \psi \text{ est un mur droit} &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \leq n+r, H_\theta^k(x)_i = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, H_\theta^k(x)_{[n+1,m]} = \sum_{j=0}^k u_\psi(\alpha_{k-j})_j . \end{aligned}$$

Théorème IV.38. *Soit $\theta \in \mathcal{R}^\mathbb{Z}$, H_θ est sensible si et seulement si une des deux conditions suivantes est vraie :*

- (1) *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $m \geq n$, $\theta_{[n+1,m]}$ n'est pas un mur droit.*
- (2) *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $m \geq n$, $\theta_{[-m,-n-1]}$ n'est pas un mur gauche.*

Démonstration. Supposons que la condition (1) soit vérifiée (le cas où la condition (2) est vérifiée se traite de manière similaire). Soit $m \geq n+r$, notons $\psi = \theta_{[n+1,m]}$. Par hypothèse ψ n'est pas un mur droit. Il existe donc $v \in A^r$ et $k > 0$ tels que $(u_\psi(v)_k)_{[0,r-1]} \neq 0^r$. Choisissons v tel que k soit minimal. Notons $\alpha_i = H_\theta^i(x)_{[m+1,m+r]}$, pour tout entier $i \geq 0$ et x la configuration définie par $x_{[m+1,m+r]} = v$ et $\forall i \in \mathbb{Z} \setminus [m+1, m+r], x_i = 0$. Nous allons montrer que la proposition

$$Q(i) := \forall j \in [0, i], \forall \ell \leq n, H_\theta^j(x)_\ell = 0 .$$

est vraie pour $i \in [0, k]$. La proposition $Q(0)$ est vraie par définition de x . Supposons que $Q(i)$ soit vraie pour $i < k$, d'après le Lemme IV.36,

$$H_\theta^i(x)_{[n+1,m]} = \sum_{j=0}^i u_\psi(\alpha_{i-j})_j$$

et donc, par minimalité de k ,

$$H_\theta^i(x)_{[n+1, n+r]} = \sum_{j=0}^i (u_\psi(\alpha_{i-j})_j)_{[0, r-1]} = 0^r.$$

ce qui implique que

$$\forall \ell \leq n, H_\theta^{i+1}(x)_\ell = 0$$

et $Q(i+1)$ est vraie.

Comme $Q(k)$ est vraie, en appliquant à nouveau le Lemme IV.36 et par minimalité de k , on a

$$H_\theta^k(x)_{[n+1, n+r]} = \sum_{j=0}^k (u_\psi(\alpha_{k-j})_j)_{[0, r-1]} = (u_\psi(v)_k)_{[0, r-1]} \neq 0^r.$$

Donc, pour toute configuration $y \in A^\mathbb{Z}$, $y_{[-m, m]} = (xy)_{[-m, m]}$ mais

$$H_\theta^k(y)_{[-n-r, n+r]} \neq H_\theta^k(x+y)_{[-n-r, n+r]},$$

et donc H_θ est sensible de constante de sensibilité 2^{-n-r} .

Supposons maintenant qu'aucune des conditions (1) et (2) ne soit vérifiée, nous allons montrer que H_θ est équicontinu.

Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $m_1 \geq n+r$ et $m_2 \geq n+r$ tels que $\theta_{[n+1, m_1]}$ est un mur droit et $\theta_{[-m_2, -n-1]}$ un mur gauche. On pose $m = \max(m_1, m_2)$, d'après la Proposition IV.35, $\theta_{[n+1, m]}$ est un mur droit et $\theta_{[-m, -n-1]}$ un mur gauche. Pour toute configuration z , on note z^- , \tilde{z} et z^+ les configurations définies par

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{Z}, z_i^- &= \begin{cases} z_i & \text{si } i < -m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \\ \tilde{z}_i &= \begin{cases} z_i & \text{si } i \in [-m, m] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \\ z_i^+ &= \begin{cases} z_i & \text{si } i > m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

En particulier, $z = z^- + \tilde{z} + z^+$ et, d'après le Corollaire IV.37,

$$\forall i \leq n+r, H_\theta^k(z^+)_i = 0 \text{ et } \forall i \geq -n-r, H_\theta^k(z^-)_i = 0.$$

Soient x et y deux configurations telles que $x_{[-m, m]} = y_{[-m, m]}$, on a alors $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} H_\theta^k(y)_{[-n, n]} &= H_\theta^k(y^-)_{[-n, n]} + H_\theta^k(\tilde{y})_{[-n, n]} + H_\theta^k(y^+)_{[-n, n]} \\ &= 0^{2n+1} + H_\theta^k(\tilde{x})_{[-n, n]} + 0^{2n+1} \\ &= H_\theta^k(x^-)_{[-n, n]} + H_\theta^k(\tilde{x})_{[-n, n]} + H_\theta^k(x^+)_{[-n, n]} \\ &= H_\theta^k(x)_{[-n, n]}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que H_θ est équicontinu et donc non sensible aux conditions initiales (Proposition IV.27). \square

Nous avons prouvé que l'équicontinuité de H_θ est caractérisée par la présence de murs droits (resp. gauches) arbitrairement loin à droite (resp. à gauche) dans la distribution θ . Une question naturelle est de savoir si l'on peut caractériser un mur en fonction des coefficients qui apparaissent dans les règles. Nous allons montrer que cela est possible lorsque le rayon r vaut 1. Dans ce cas, l'ensemble des murs (droits ou gauches) forme un langage rationnel. Donc l'ensemble des distributions qui induisent des automates cellulaires équicontinus forment, quant à lui, un langage ζ -rationnel. D'après la Définition IV.25, une règle locale $f \in \mathcal{R}$ est alors définie par trois coefficients λ_f^- , $\tilde{\lambda}_f$ et λ_f^+ dans A tels que

$$\forall a, b, c \in A, f(a, b, c) = \lambda_f^- \cdot a + \tilde{\lambda}_f \cdot b + \lambda_f^+ \cdot c .$$

Proposition IV.39. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une distribution $\psi \in \mathcal{R}^n$ est un mur droit (resp. gauche) si et seulement si $\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^+ = 0$ (resp. $\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^- = 0$).*

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $n \geq 2$ (Proposition IV.35). Nous allons montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall i \in [0, n-1], \exists \alpha_i \in A, (u_\psi(1)_k)_i = \alpha_i \cdot \prod_{j=i}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ .$$

Pour tout $i \in [0, n-1], (u_\psi(1)_0)_i = 0 = 0 \cdot \prod_{j=i}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ .$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall i \in [0, n-1], \exists \alpha_i \in A, (u_\psi(1)_k)_i = \alpha_i \cdot \prod_{j=i}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ .$$

Pour $i = 0$, on a

$$\begin{aligned} (u_\psi(1)_{k+1})_0 &= \psi_0(0(u_\psi(1)_k)_{[0,1]}) = \tilde{\lambda}_{\psi_0} \cdot \alpha_0 \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ + \lambda_{\psi_0}^+ \cdot \alpha_1 \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ \\ &= (\tilde{\lambda}_{\psi_0} \cdot \alpha_0 + \alpha_1) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ . \end{aligned}$$

Pour $i \in [1, n-2]$, on a

$$\begin{aligned}
(u_\psi(1)_{k+1})_i &= \psi_i((u_\psi(1)_k)_{[i-1, i+1]}) \\
&= \lambda_{\psi_i}^- \cdot \alpha_{i-1} \cdot \prod_{j=i-1}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ + \tilde{\lambda}_{\psi_i} \cdot \alpha_i \cdot \prod_{j=i}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ + \\
&\quad \lambda_{\psi_i}^+ \cdot \alpha_{i+1} \cdot \prod_{j=i+1}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ \\
&= \left(\lambda_{\psi_i}^- \cdot \lambda_{\psi_{i-1}}^+ \cdot \alpha_{i-1} + \tilde{\lambda}_{\psi_i} \cdot \alpha_i + \alpha_{i+1} \right) \cdot \prod_{j=i}^{n-1} \lambda_{\psi_j}^+ .
\end{aligned}$$

Enfin pour $i = n-1$, on a

$$\begin{aligned}
(u_\psi(1)_{k+1})_{n-1} &= \psi_{n-1}((u_\psi(1)_k)_{[n-2, n-1]}\beta) \\
&= \lambda_{\psi_{n-1}}^- \cdot \alpha_{n-2} \cdot \lambda_{\psi_{n-2}}^+ \cdot \lambda_{\psi_{n-1}}^+ + \\
&\quad \tilde{\lambda}_{\psi_{n-1}} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \lambda_{\psi_{n-1}}^+ + \lambda_{\psi_{n-1}}^+ \cdot \beta \\
&= \left(\lambda_{\psi_{n-1}}^- \cdot \lambda_{\psi_{n-2}}^+ \cdot \alpha_{n-2} + \tilde{\lambda}_{\psi_{n-1}} \cdot \alpha_{n-1} + \beta \right) \cdot \lambda_{\psi_{n-1}}^+
\end{aligned}$$

où $\beta = 1$ si $k = 1$, et $\beta = 0$ sinon.

Si $\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^+ = 0$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, (u_\psi(1)_k)_i = 0$ et ψ est un mur droit (Remarque IV.31). Sinon, on montre par récurrence que

$$\forall k \in [1, n], (u_\psi(1)_k)_{n-k} = \prod_{i=n-k}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^+ .$$

On a, en particulier, $(u_\psi(1)_n)_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^+ \neq 0$. Ce fait prouve que ψ n'est pas un mur droit. \square

Ceci prouve que les murs forment bien un langage rationnel, nous allons montrer comment construire un automate qui reconnaît les distributions qui induisent des automates équicontinus.

On note $\mathcal{A} = (Q, \mathcal{R}, T, I, F)$ l'automate fini tel que $Q = \{-, +\} \times A$, $I = \{(-, 0)\}$, $F = \{(+, 0)\}$ et l'ensemble des transitions T est l'ensemble contenant les transitions suivantes :

1. $((-, a), f, (-, \lambda_f^- \cdot a)), \forall a \in A \setminus \{0\}, \forall f \in \mathcal{R}$ (détection d'un mur gauche) ;
2. $((-, 0), f, (-, 1)), \forall f \in \mathcal{R}$ (fin de détection) ;
3. $((-, 1), f, (-, 1)), \forall f \in \mathcal{R}$ (attente) ;
4. $((-, 1), f, (+, 1)), \forall f \in \mathcal{R}$ (transition entre gauche et droite) ;
5. $((+, 1), f, (+, 1)), \forall f \in \mathcal{R}$ (attente) ;
6. $((+, 1), f, (+, 0)), \forall f \in \mathcal{R}$ (début de détection) ;

7. $((+, \lambda_f^+ \cdot a), f, (+, a)), \forall a \in A \setminus \{0\}, \forall f \in \mathcal{R}$ (détection d'un mur droit).

L'automate \mathcal{A} est constitué de deux composantes, l'une détecte les murs gauches minimaux tandis que l'autre détecte les murs droits minimaux. Pour la partie gauche par exemple, l'état $(-, 1)$ est un état d'attente dont on sort de manière non-déterministe pour commencer la détection d'un mur gauche. Un tel mur est effectivement détecté lorsqu'on atteint l'état $(-, 0)$. On retourne alors dans l'état d'attente. On passe d'une composante à l'autre de manière non-déterministe. La Figure IV.7 présente une vue conceptuelle de l'automate \mathcal{A} .

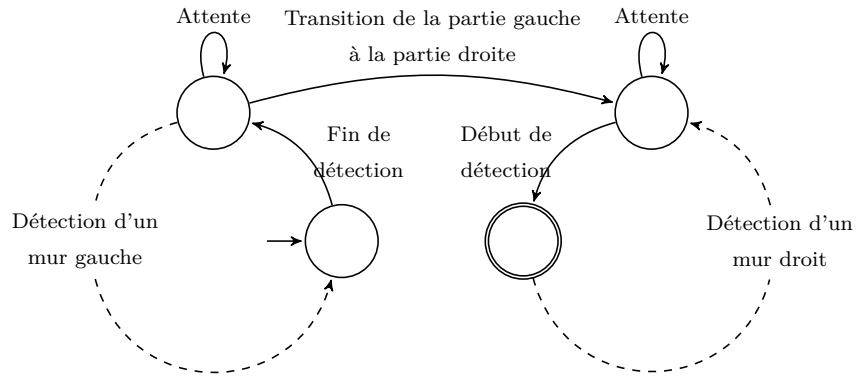


FIGURE IV.7 – Représentation conceptuelle de la reconnaissance de distributions équicontinues.

Lemme IV.40. *Une distribution $\psi \in \mathcal{R}^*$ est un mur droit si et seulement s'il existe un chemin dans \mathcal{A} de l'état $(+, 0)$ à l'état $(+, 1)$ étiqueté par un facteur de ψ .*

Démonstration. Notons n la taille de ψ .

Si ψ est un mur droit, alors $\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^+ = 0$ d'après la Proposition IV.39. On note $k = \max \left\{ j \in [0, n-1] : \prod_{i=j}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^+ = 0 \right\}$, alors

$$(+, 0 = \prod_{i=k}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^+) \xrightarrow{\psi_k} (+, \prod_{i=k+1}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^+) \xrightarrow{\psi_{k+1}} \dots \xrightarrow{\psi_{n-1}} (+, 1 = \prod_{i=n}^{n-1} \lambda_{\psi_i}^+)$$

est un chemin dans \mathcal{A} étiqueté par $\psi_{[k, n-1]}$.

Si p est un chemin dans \mathcal{A} de $(+, 0)$ à $(+, 1)$ étiqueté par un facteur ψ' de ψ . On note p' le sous-chemin de p qui s'arrête au premier état $(+, 1)$ rencontré, notons ψ'' l'étiquette de p' et n' la taille de ψ'' . Par construction de \mathcal{A} ,

ce chemin ne contient que des transitions de la forme $((+, \lambda_f^+ \cdot a), f, (+, a))$, $a \in A \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{R}$ et donc p' est le chemin

$$(+, 0 = \prod_{i=0}^{n'-1} \lambda_{\psi_i''}^+) \xrightarrow{\psi_0''} (+, \prod_{i=1}^{n'-1} \lambda_{\psi_i''}^+) \xrightarrow{\psi_1''} \dots \xrightarrow{\psi_{n'-1}''} (+, 1 = \prod_{i=n'}^{n'-1} \lambda_{\psi_i''}^+) .$$

En outre ψ'' est un mur droit d'après la Proposition IV.39. Or ψ'' est un préfixe de ψ' et donc un facteur de ψ , d'après la Proposition IV.35, ψ est aussi un mur droit. \square

De façon symétrique, on démontre le Lemme IV.41.

Lemme IV.41. *Une distribution $\psi \in \mathcal{R}^*$ est un mur gauche si et seulement s'il existe un chemin dans \mathcal{A} de l'état $(-, 1)$ à l'état $(-, 0)$ étiqueté par un facteur de ψ .*

Théorème IV.42. *Le langage \mathcal{L} des distributions qui induisent des rv-CA (de rayon 1) linéaires et équicontinus*

$$\mathcal{L} := \left\{ \theta \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} : H_{\theta} \text{ est équicontinu} \right\}$$

est ζ -rationnel.

Démonstration. Nous allons montrer, par double inclusion, que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\zeta}(\mathcal{A})$.

Soit $(p_i, \theta_i, q_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un chemin bi-infini acceptant dans \mathcal{A} et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe n_1 et n_2 tels que $n < n_1 < n_2$ et $p_{n_1} = p_{n_2} = (+, 0)$. Comme $(+, 1)$ est l'unique prédécesseur de $(+, 0)$, $p_{n_2-1} = (+, 1)$. Donc $(p_i, \theta_i, q_i)_{i \in [n_1, n_2-2]}$ est un chemin de $(+, 0)$ à $(+, 1)$ étiqueté par un facteur de $\theta_{[n+1, n_2]}$. On en déduit, d'après le Lemme IV.40, que $\theta_{[n+1, n_2]}$ est un mur droit. On peut de manière symétrique trouver un indice $n_3 > n$ tel que $\theta_{[-n_3, -n-1]}$ soit un mur gauche. Ce qui prouve, d'après le Théorème IV.38, que H_{θ} n'est pas sensible, et donc H_{θ} est équicontinu d'après la Proposition IV.27. On a prouvé que $\mathcal{L}^{\zeta}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}$.

Réciproquement, soit $\theta \in \mathcal{L}$. D'après le Théorème IV.38 et la Proposition IV.27, la suite d'indices $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $i_0 = 0$ et

$$\forall k \leq 0, i_{k-1} = \max\{j \in \mathbb{Z} : j < i_k \text{ et } \theta_{[j, i_k-2]} \text{ est un mur gauche}\}$$

$$\forall k \geq 0, i_{k+1} = \min\{j \in \mathbb{Z} : j > i_k \text{ et } \theta_{[i_k+2, j]} \text{ est mur droit}\}$$

est bien définie. Soit $k > 0$, $\theta_{[i_k+2, i_{k+1}]}$ est mur droit donc $\prod_{j=i_k+2}^{i_{k+1}} \lambda_{\theta_j}^+ = 0$ par la Proposition IV.39. On note $n = \max\left(l \in [i_k+2, i_{k+1}] : \prod_{j=l}^{i_{k+1}} \lambda_{\theta_j}^+ = 0\right)$. Alors le chemin p_k défini par

$$\begin{aligned} (+, 1) &\xrightarrow{\theta_{i_k+1}} (+, 1) \xrightarrow{\theta_{i_k+2}} \dots \xrightarrow{\theta_{n-1}} \\ &(+, 0 = \prod_{i=n}^{i_{k+1}} \lambda_{\theta_i}^+) \xrightarrow{\theta_n} (+, \prod_{i=n}^{i_{k+1}} \lambda_{\theta_i}^+) \xrightarrow{\theta_{n+1}} \dots \xrightarrow{\theta_{i_k+1}} (+, 1) \end{aligned}$$

est un chemin de $(+, 1)$ à $(+, 1)$, d'étiquette $\theta_{[i_k+1, i_{k+1}]}$, passant par l'état final $(+, 0)$. On construit de manière symétrique un chemin p_{-k} de $(-, 1)$ à $(-, 1)$, d'étiquette $\theta_{[i_{-k}, i_{-k+1}-1]}$, passant par l'état initial $(-, 0)$. On pose p_0 le chemin

$$(-, 1) \xrightarrow{\theta_0} (+, 1) .$$

Finalement, on note p la concaténation de tous les chemins p_k pour $k \in \mathbb{Z}$. Le chemin p est un chemin acceptant étiqueté par θ , donc $\theta \in \mathcal{L}^\zeta(\mathcal{A})$ et $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^\zeta(\mathcal{A})$. \square

Corollaire IV.43. *Le langage \mathcal{L}' des distributions qui induisent des ν -CA (de rayon 1) linéaires et sensibles*

$$\mathcal{L}' := \left\{ \theta \in \mathcal{R}^\mathbb{Z} : H_\theta \text{ est sensible} \right\}$$

est ζ -rationnel.

Démonstration. Nous avons $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^c$ par la Proposition IV.27 et les langages ζ -rationnels sont clos par complémentation. \square

Nous présentons maintenant un exemple d'automate \mathcal{A} qui utilise notre construction, dans un cas simple, pour détecter les distributions qui induisent un ν -CA linéaire et équicontinu.

Exemple IV.44. Soient $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R} = \{f, g, h\}$ où f, g et h sont les règles locales définies par

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in A, \quad f(x, y, z) &= x + z \pmod{4} , \\ g(x, y, z) &= 2 \cdot (x + z) \pmod{4} , \\ h(x, y, z) &= 3 \cdot (x + z) \pmod{4} . \end{aligned}$$

L'automate qui reconnaît \mathcal{L} par la construction proposée précédemment est représenté sur la Figure IV.8. Par symétrie des règles de \mathcal{R} , les murs gauches et les murs droits sont confondus et sont les distributions finies dans $\mathcal{R}^*g\mathcal{R}^*g\mathcal{R}^*$, *i.e.* les distributions finies qui contiennent au moins deux occurrences de la règle g .

L'automate \mathcal{A} que nous avons construit nous permet de conclure quant au caractère ζ -rationnel du langage des distributions sur \mathcal{R} qui induisent des ν -CA linéaires et équicontinus. Cet automate contient $2 \times \text{Card}(A)$ états et $O(\text{Card}(A))$ transitions. Nous proposons maintenant une amélioration qui peut, dans certains cas, réduire drastiquement le nombre d'états nécessaires pour la reconnaissance du langage \mathcal{L} .

On note Inv l'ensemble des éléments inversibles de A et on définit la relation \sim sur A par

$$\forall a, b \in A, a \sim b \Leftrightarrow \exists c \in \text{Inv}(A), a = b \cdot c .$$

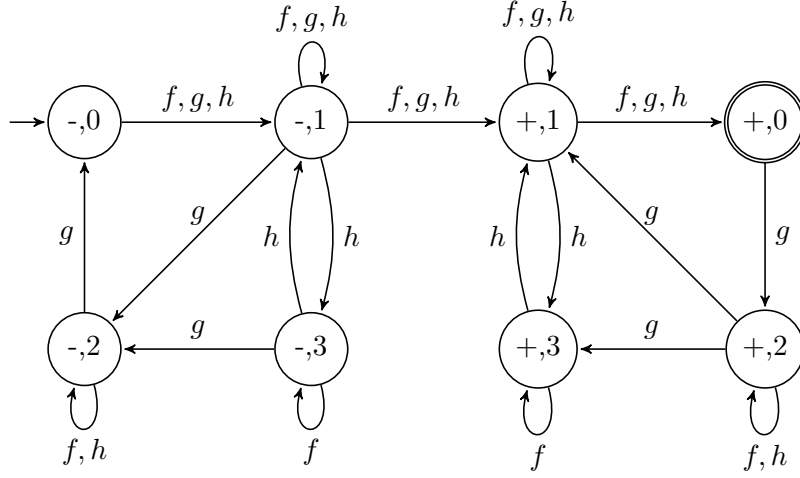


FIGURE IV.8 – Automate reconnaissant les distributions équicontinues.

On vérifie aisément que \sim est une relation d'équivalence qui est de plus compatible avec la loi \cdot :

$$\forall a, b, c, d \in A, a \sim b \text{ et } c \sim d \Rightarrow a \cdot c \sim b \cdot d .$$

On note $[a]$ la classe d'équivalence d'un élément $a \in A$ et $A|_{\sim}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour \sim . Comme \cdot est compatible avec \sim , l'opération s'étend à $A|_{\sim}$:

$$\forall a, b \in A, [a] \cdot [b] := [a \cdot b] .$$

Il faut noter que $[0] = \{0\}$ et donc si u est un mot de taille n sur A ,

$$\prod_{i=0}^{n-1} u_i = 0 \Leftrightarrow \left[\prod_{i=0}^{n-1} u_i \right] = [0] \Leftrightarrow \prod_{i=0}^{n-1} [u_i] = [0] .$$

Si ψ est une distribution finie sur \mathcal{R} de taille n , alors, d'après la Proposition IV.39 et la remarque précédente, ψ est un mur droit si et seulement si $\prod_{i=0}^{n-1} [\lambda_{\psi_i}^+] = [0]$. On peut donc construire l'automate \mathcal{A} en se limitant aux éléments de $A|_{\sim}$ et \mathcal{A} aura alors $2 \times \text{Card}(A|_{\sim})$ états et $O(\text{Card}(A|_{\sim}))$ transitions.

Exemple IV.45. Soit $n \geq 2$ un entier ; n admet une décomposition en produit de facteurs premiers $n = \prod_{i=0}^k p_i^{\alpha_i}$, $k \in \mathbb{N}$, où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_i des entiers strictement positifs. Si $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors $\text{Card}(A|_{\sim}) = \prod_{i=0}^k (\alpha_i + 1)$.

Nous introduisons le Lemme IV.46 afin de démontrer le résultat de l'exemple. Pour tous entiers a et b , on note $\text{pgcd}(a, b)$ le plus grand diviseur commun à a et b .

Lemme IV.46. Soit $i \in [0, k]$, alors $p_i^{\alpha_i+1} \sim p_i^{\alpha_i}$.

Démonstration. Comme $\text{pgcd}(p_i^{\alpha_i+1}, n) = p_i^{\alpha_i}$, il existe, d'après le théorème de Bézout, des entiers k_1 et k_2 tels que

$$p_i^{\alpha_i+1} \cdot k_1 + n \cdot k_2 = p_i^{\alpha_i} .$$

On a également

$$p_i^{\alpha_i+1} \cdot \left(k_1 + \frac{n}{p_i^{\alpha_i}} \right) + n \cdot (k_2 - p) = p_i^{\alpha_i} .$$

Supposons par l'absurde que k_1 et $k'_1 := k_1 + \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$ ne sont pas premiers avec n . Alors il existe p (resp. p') un nombre premier tel que p (resp. p') divise k_1 et n (resp. k'_1 et n). En ce cas, p et p' divisent $p_i^{\alpha_i}$ et $p = p' = p_i$. D'où p_i divise $k'_1 - k_1 = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$ ce qui est contradictoire. L'un des deux entiers est donc premier avec n , k_1 par exemple. Dans A (où $n = 0$), on a alors

$$p_i^{\alpha_i+1} \cdot k_1 = p_i^{\alpha_i} ,$$

où k_1 est premier avec n et donc inversible. Ce qui prouve que $p_i^{\alpha_i+1} \sim p_i^{\alpha_i}$. \square

Nous sommes désormais en mesure de prouver l'Exemple IV.45.

Proposition IV.47. Il y a $\prod_{i=0}^k (\alpha_i + 1)$ classes d'équivalence pour la relation \sim sur A :

$$\text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|_{\sim}) = \prod_{i=0}^k (\alpha_i + 1) .$$

Démonstration. Nous mettons les classes d'équivalence de A sont en bijection avec les diviseurs de n .

Soit $a \in A$, alors $a = a' \cdot \prod_{i=0}^k p_i^{\beta_i}$ où a' est premier avec n et les β_i sont des entiers positifs. D'après le Lemme IV.46,

$$\prod_{i=0}^k p_i^{\beta_i} \sim \prod_{i=0}^k p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)} = \text{pgcd}(a, n) .$$

Comme a' est premier avec n , $a' \in \text{Inv}(A)$ et $a \in [\text{pgcd}(a, n)]$.

Soient $0 < d < d'$ deux diviseurs distincts de n . Supposons par l'absurde que $[d] = [d']$, en ce cas $[d \cdot \frac{n}{d'}] = [d' \cdot \frac{n}{d'}] = [n] = [0]$ mais $0 < d \cdot \frac{n}{d'} < n$ et donc $d \cdot \frac{n}{d'} \notin [0]$ ce qui est contradictoire. Donc $[d] \neq [d']$.

Nous avons montré que tout élément de A est dans la même classe qu'un diviseur de n et que deux diviseurs distincts étaient dans des classes distinctes, ce qui prouve la bijection. Comme les diviseurs de n sont les nombres de la forme $\prod_{i=0}^k p_i^{\beta_i}$ avec $\forall i \in [0, k], 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, on obtient le résultat. \square

On note $d : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ la fonction qui à un entier n associe le nombre de diviseurs de n . D'après la Proposition IV.47, pour tout entier $n > 1$, $\text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|_{\sim}) = d(n)$.

L'exemple montre que, dans le cas de l'anneau des entiers modulo n , l'amélioration proposée est effective. Par exemple si n est un nombre premier, $d(n) = 2$, et \mathcal{A} peut être construit avec 4 états au lieu de $2n$ états. On peut se référer à la Table IV.1 pour obtenir les premières valeurs de $d(n)$. Dans cette table, $\text{dec}(n)$ est la décomposition en facteurs premiers de n . On peut constater graphiquement l'évolution de la suite $d(n)$ sur la Figure IV.9 pour une plus grande plage de valeurs. Dans [8], Section 13.10, il a été établi que le comportement asymptotique de $d(n)$ vérifiait

$$\forall \varepsilon > 0, d(n) = o(n^\varepsilon) .$$

n			2	3	4	5	6	7	8	9
$\text{dec}(n)$			2	3	2^2	5	$2 \cdot 3$	7	2^3	3^2
$d(n)$			2	2	3	2	4	2	4	3

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\text{dec}(n)$	$2 \cdot 5$	11	$2^2 \cdot 3$	13	$2 \cdot 7$	$3 \cdot 5$	2^4	17	$2 \cdot 3^2$	19
$d(n)$	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$\text{dec}(n)$	$2^2 \cdot 5$	$3 \cdot 7$	$2 \cdot 11$	23	$2^3 \cdot 3$	5^2	$2 \cdot 13$	3^3	$2^2 \cdot 7$	29
$d(n)$	6	4	4	2	8	3	4	4	6	2

TABLE IV.1 – Table des premières valeurs de la fonction $d(n)$.

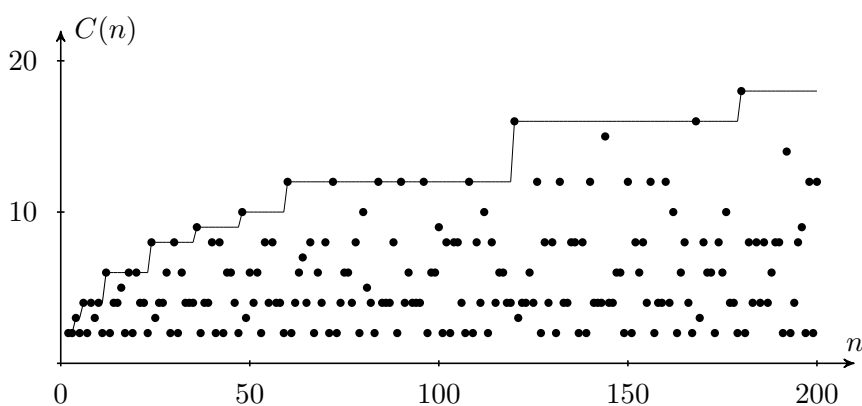


FIGURE IV.9 – La suite $(d(n))_{n \geq 2}$.

Chapitre V

Modes d'acceptation pour ω -langages

Ce chapitre est dédié à l'étude de différentes conditions d'acceptation pour ω -langage. Il reprend les résultats publiés dans [3]. Dans le Chapitre IV, plusieurs langages de mots bi-infinis ont été caractérisés et se sont révélés être des langages ζ -rationnels. A première vue, la complexité de ces langages semble différente. Ainsi les langages que l'on voit apparaître dans le Théorème IV.23 sont définis à l'aide de chemins qui doivent passer au moins une fois par un état donné. Les langages induits par le Théorème IV.42, quant à eux, nécessitent des chemins qui passent infiniment souvent par certains états. Intuitivement, cette classe de langages serait donc plus compliquée que la précédente. Comme un langage ζ -rationnel est une union de concaténations de langages ω -rationnels (Définition A.17), nous nous sommes intéressés à la complexité des langages ω -rationnels. Nous cherchons à établir une hiérarchie entre ces langages afin, par la suite, de pouvoir cerner les différences de complexité entre les langages rencontrés au Chapitre IV.

Une vaste littérature existe sur les ω -langages, on peut par exemple citer [62, 59, 55]. Plusieurs hiérarchies de classes de langages y sont proposées (hiérarchie borélienne, hiérarchie de Wadge, hiérarchie de Chomsky, hiérarchie arithmétique) suivant des critères différents (topologie, machines nécessaires pour la reconnaissance, définissabilité dans un système logique). Dans le cas des langages ω -rationnels, la complexité des langages a été étudiée en fonction de leur reconnaissance par des automates finis. Elle dépend à la fois de la structure de l'automate (complétude, déterminisme) et du mode d'acceptation utilisé. Les modes d'acceptation les plus connus sont les conditions de Büchi [13] (utilisée pour les définitions de l'Appendice A) et de Muller [50] qui imposent à un chemin de passer infiniment souvent par certains états pour être considéré comme acceptant. D'autres modes d'acceptation ainsi que le pouvoir d'expressivité des langages associés ont été étudiés [32, 41, 60, 48, 43]. Ces modes d'acceptation diffèrent quant aux

conditions utilisées pour définir un chemin acceptant.

Nous reprenons ici le formalisme de [59] utilisé pour identifier les classes de langages. Nous complétons l'analyse qui y est faite avec les résultats de [48, 43] pour comparer les classes avec les ensembles de la hiérarchie borélienne. Nous verrons notamment les modifications apportées aux classes \mathbb{L} et \mathbb{L}' définies dans [48] lorsqu'on autorise la reconnaissance par des automates plus généraux que ceux initialement considérés. Enfin, nous entamons l'étude de nouvelles conditions d'acceptation qui apparaissent naturellement dans ce formalisme.

V.1 Définitions et résultats connus

Dans ce chapitre, nous utilisons de manière intensive les notations de l'Appendice A. En plus de ces notations, nous appelons FA un automate fini, DFA un automate fini déterministe, CFA un automate fini complet, et CDFA un automate fini à la fois déterministe et complet. Nous supposons que les automates présentés ici n'ont qu'un seul état initial (c'est déjà le cas par définition pour les DFA et ce n'est pas une restriction dans le cas non-déterministe) afin de faciliter l'écriture des preuves.

Un mode d'acceptation est, dans le cas le plus général possible, un moyen de sélectionner parmi tous les chemins d'un automate, ceux qui seront acceptants. C'est donc un sous-ensemble de tous les chemins possibles de l'automate. Depuis les travaux de Büchi [13], la manière usuelle de définir un mode d'acceptation est de considérer les états qui sont visités par un chemin et de les comparer à un ensemble d'états donné dans la définition de l'automate.

Définition V.1. Soient $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA et $p = (p_i, x_i, q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un chemin dans \mathcal{A} . Les ensembles

- $\text{run}_{\mathcal{A}}(p) := \{q \in Q : \exists i > 0, p_i = q\}$,
- $\text{inf}_{\mathcal{A}}(p) := \{q \in Q : \forall i > 0, \exists j \geq i, p_j = q\}$,
- $\text{fin}_{\mathcal{A}}(p) := \text{run}_{\mathcal{A}}(p) \setminus \text{inf}_{\mathcal{A}}(p)$ et
- $\text{ninf}_{\mathcal{A}}(p) := Q \setminus \text{inf}_{\mathcal{A}}(p)$

correspondent respectivement à l'ensemble des états visités *au moins une fois*, *infinitement souvent*, *finiment souvent* (mais au moins une fois), et *non infinitement souvent* (éventuellement jamais) par le chemin p .

On note \sqcap la relation entre ensembles telle que pour tous ensembles A et B , $A \sqcap B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Nous appelons **condition d'acceptation** un couple $(c, \mathbf{R}) \in \{\text{run}, \text{inf}, \text{fin}, \text{ninf}\} \times \{\sqcap, \subseteq, =\}$. Une condition d'acceptation $\text{cond} = (c, \mathbf{R})$ définit un **mode d'acceptation** pour les chemins infinis d'un automate $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$. Un chemin p de \mathcal{A} est **acceptant** si

1. le chemin p est initial et
2. il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $c_{\mathcal{A}}(p) \mathbf{R} F$.

Un mot est **accepté** par \mathcal{A} sous la condition $cond$ si c'est l'étiquette d'un chemin acceptant pour le mode d'acceptation induit par $cond$. On note $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{cond}$ le langage accepté par \mathcal{A} sous la condition $cond$, c'est-à-dire l'ensemble des mots acceptés par \mathcal{A} sous la condition $cond$.

Définition V.2. Soient $cond$ une condition d'acceptation et Σ un alphabet fini, les ensembles

- $FA^{(\Sigma)}(cond) = \{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{cond}, \mathcal{A} \text{ est FA sur } \Sigma\}$,
- $DFA^{(\Sigma)}(cond) = \{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{cond}, \mathcal{A} \text{ est DFA sur } \Sigma\}$,
- $CFA^{(\Sigma)}(cond) = \{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{cond}, \mathcal{A} \text{ est CFA sur } \Sigma\}$ et
- $CDFA^{(\Sigma)}(cond) = \{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{cond}, \mathcal{A} \text{ est CDFA sur } \Sigma\}$

sont les classes de langages acceptés respectivement par des FA, DFA, CFA, et CDFA sous la condition $cond$.

Büchi a montré dans [13] qu'un langage de mots infinis était ω -rationnel si et seulement s'il était MSO-définissable. Nous allons montrer que toutes les conditions d'acceptation que nous avons définies sont MSO-définissables et, par des techniques classiques, nous montrerons que tout langage reconnu par un automate sous l'une de ces conditions est ω -rationnel. Pour plus de détails sur les liens entre langages formels et logique, on peut se référer à [63, 55].

On se donne un alphabet fini Σ . La logique monadique du second ordre (logique MSO) associée à cet alphabet est le système logique dans lequel on trouve :

- des variables du premier ordre $x, y, z \dots$
- des variables du second ordre $X, Y, Z \dots$
- des relations unaires Q_a pour $a \in \Sigma$,
- des relations binaires $=, S$ et $<$.

Les variables du premier ordre représentent des positions tandis que celles du second ordre représentent des relations unaires, c'est-à-dire des ensembles de positions. La relation Q_a représente l'ensemble des positions où apparaît la lettre a . Les relations S et $<$ sont respectivement les relations de successeur et d'ordre.

Les formules atomiques sont les formules de la forme

$$x = y, \quad X(y), \quad S(x, y), \quad x < y, \quad Q_a(x) \text{ pour } a \in \Sigma .$$

L'ensemble des formules est obtenu en combinant les formules atomiques à l'aide des connecteurs et quantificateurs logiques classiques : \neg la négation, \vee la disjonction, \wedge la conjonction, \rightarrow l'implication, \leftrightarrow l'équivalence, \exists la quantification existentielle et \forall la quantification universelle. On note $\phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$ une formule ϕ dans laquelle les variables X_1, \dots, X_m et x_1, \dots, x_n au plus apparaissent libres. Une formule sans variable libre est dite close.

Exemple V.3. Les formules

$$(x < y) \wedge \neg \forall z \left((x < z) \wedge (z < y) \right)$$

et

$$\exists X \left(\forall x \forall y \left(\left(X(x) \wedge S(x, y) \right) \rightarrow X(y) \right) \right) \wedge X(y) \wedge \neg X(x)$$

sont deux formules de la logique MSO. Ce sont en fait les moyens de traduire $S(x, y)$ à l'aide de $<$ et $x < y$ à l'aide de S [55].

Définition V.4. Soit $w \in \Sigma^\omega$, soient $E_1, \dots, E_m \subseteq \mathbb{N}$, soient $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, et soit $\phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$ une formule. On dit que w **satisfait** ϕ , et on note

$$(w, E_1, \dots, E_m, i_1, \dots, i_n) \models \phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n) ,$$

si ϕ est vérifiée lorsque

- les variables du premier ordre sont interprétées comme des éléments de \mathbb{N} ,
- les variables du second ordre sont interprétées comme des parties de \mathbb{N} ,
- $\forall a \in \Sigma$, Q_a est interprété comme l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} : w_i = a\}$,
- les relations $=$, S et $<$ sont respectivement interprétées par les relations d'égalité, de successeur et d'ordre sur \mathbb{N} ,
- E_j sert d'interprétation à X_j pour $j \in [1, m]$,
- i_j sert d'interprétation à x_j pour $j \in [1, n]$.

Définition V.5. Soit ϕ une formule close, le **langage** associé à ϕ est l'ensemble $\mathcal{L}(\phi) := \{w \in \Sigma^\omega : w \models \phi\}$.

Un ω -langage $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^\omega$ est dit **MSO-définissable** s'il existe une formule close ϕ telle que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi)$.

Théorème V.6 (Büchi [13]). *Un ω -langage est ω -rationnel si et seulement s'il est MSO-définissable.*

Proposition V.7. *Soient $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA et cond une condition d'acceptation. Le langage $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\text{cond}}$ est ω -rationnel.*

Démonstration. Nous allons en fait montrer que ce langage est MSO-définissable, ce qui permet de conclure par le Théorème V.6. Nous allons exhiber une formule ϕ qui encode d'une part l'automate \mathcal{A} et d'autre part la condition d'acceptation. On note $n = \text{Card}(Q)$ et q_0, \dots, q_{n-1} les éléments de Q .

La formule permettant de décrire le langage est

$$\begin{aligned} \phi = & \exists X_{q_0} \dots \exists X_{q_{n-1}} \\ & \left(\bigwedge_{p,q \in Q, p \neq q} \neg \exists x \left(X_p(x) \wedge X_q(x) \right) \right) \wedge \\ & \left(\forall x \forall y S(x, y) \rightarrow \bigvee_{(p,a,q) \in T} \left(X_p(x) \wedge Q_a(x) \wedge X_q(y) \right) \right) \wedge \\ & \left(\exists x \left(\neg \exists y S(y, x) \right) \wedge X_{q_0}(x) \right) \wedge \text{COND}(X_{q_0}, \dots, X_{q_{n-1}}) . \end{aligned}$$

Les trois premières lignes servent à encoder un chemin dans \mathcal{A} . Les relations X_q pour $q \in Q$ correspondent à l'ensemble des positions où l'on se trouve dans l'état q . La formule

$$\bigwedge_{p,q \in Q, p \neq q} \neg \exists x \left(X_p(x) \wedge X_q(x) \right)$$

impose que ces ensembles soient disjoints tandis que la formule

$$\forall x \forall y S(x, y) \rightarrow \bigvee_{(p,a,q) \in T} \left(X_p(x) \wedge Q_a(x) \wedge X_q(y) \right)$$

indique que pour passer d'un état p à un état q en lisant une lettre a , il faut emprunter une transition $(p, a, q) \in T$. La formule $\exists x \left(\neg \exists y S(y, x) \right) \wedge X_{q_0}(x)$ indique que le chemin est initial car le seul entier qui n'a pas de prédécesseur est 0, et à cette position on doit se trouver dans l'état q_0 . Enfin la formule $\text{COND}(X_{q_0}, \dots, X_{q_{n-1}})$ indique que le chemin est acceptant et dépend de *cond*. Si $\text{cond} = (c, \mathbf{R})$, on définit la formule $C(X)$ par

$$C(X) := \begin{cases} \exists x \left(\exists y S(y, x) \right) \wedge X(x) & \text{si } c = \text{run} \\ \forall x \exists y (x < y) \wedge X(y) & \text{si } c = \text{inf} \\ \left(\exists x \left(\exists y S(y, x) \right) \wedge X(x) \right) \wedge \\ \quad \left(\neg \forall x \exists y (x < y) \wedge X(y) \right) & \text{si } c = \text{fin} \\ \neg \forall x \exists y (x < y) \wedge X(y) & \text{si } c = \text{ninf} \end{cases} .$$

La formule $\text{COND}(X_{q_0}, \dots, X_{q_{n-1}})$ s'écrit alors en fonction de \mathbf{R} :

– pour la relation \sqcap ,

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigvee_{q \in F} C(X_q) ,$$

– pour la relation \subseteq ,

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{q \in Q \setminus F} \neg C(X_q) ,$$

– pour la relation =,

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \left(\bigwedge_{q \in F} C(X_q) \wedge \bigwedge_{q \in Q \setminus F} \neg C(X_q) \right) .$$

□

Plusieurs des conditions d'acceptation que nous avons définies ont déjà été étudiées dans la littérature. La Table V.1 présente certaines de ces contributions.

	\sqcap	\subseteq	$=$
run	Landweber [41]	Hartmanis et Stearns [32]	Staiger et Wagner [60]
inf	Büchi [13]	Landweber [41]	Muller [50]
fin	Litovsky et Staiger [43]		Dennunzio et coll. ¹ [3]
ninf	Dennunzio et coll. ² [3]	Dennunzio et coll. ² [3]	Dennunzio et coll. [3]

TABLE V.1 – Résultats connus sur les conditions d'acceptation.

On suppose désormais que Σ contient au moins deux lettres distinctes. Tous les langages et toutes les classes de langages considérés à partir de maintenant, sauf mention contraire, seront implicitement sur Σ . On notera par exemple, pour une condition d'acceptation *cond*, $\text{CDFA}(\text{cond})$ au lieu de $\text{CDFA}^{(\Sigma)}(\text{cond})$. Les classes de langages sur Σ induisent une hiérarchie et plusieurs d'entre elles correspondent aux premières classes de la **hiérarchie borélienne** [67]. Les classes de la hiérarchie borélienne sont définies à l'aide d'une topologie, dans le cas des mots infinis, nous utilisons la topologie induite par la distance de Cantor :

$$\forall x, y \in \Sigma^\omega, d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 2^{-\min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}} & \text{sinon} \end{cases} .$$

Nous ne définissons ici que les classes les plus basses de la hiérarchie borélienne, le lecteur pourra se référer à [49] pour une définition complète des ensembles boréliens et de leur hiérarchie. On note respectivement F , G , F_σ et G_δ l'ensemble des fermés, des ouverts, des unions dénombrables de fermés et des intersections dénombrables d'ouverts de Σ^ω . On note RAT l'ensemble des langages ω -rationnels sur Σ . Soient A et B deux ensembles d'ensembles, on note :

- $\mathcal{B}(A)$ la clôture booléenne de A , c'est-à-dire le plus petit ensemble contenant A et clos par union et intersection finies et par complémentation,

1. Résultats partiels, le cas des DFA et CDFA est un problème ouvert.

2. Ces conditions ont précédemment été étudiées dans [48] dans le cas des automates complets et en supposant que la table des états acceptants est réduite à un singleton.

- $A \Delta B$ l'ensemble $\{U \cap V : U \in A, V \in B\}$,
- A^R l'ensemble $A \cap \text{RAT}$ et
- $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A .

Nous donnons quelques propriétés de clôture sur les classes qui interviennent dans la suite ainsi que des relations connues.

Proposition V.8 (Wagner [67]).

- Les classes F^R , G^R , $F_\sigma^R \cap G_\delta^R$, F_σ^R , G_δ^R et RAT sont closes par union finie. La classe $F^R \Delta G^R$ n'est pas close par union finie.
- Les classes F^R , G^R , $F^R \Delta G^R$, $F_\sigma^R \cap G_\delta^R$, F_σ^R , G_δ^R et RAT sont closes par intersection finie.
- Les classes $F_\sigma^R \cap G_\delta^R$ et RAT sont closes par complémentation. Les classes F^R , G^R , $F^R \Delta G^R$, F_σ^R et G_δ^R ne sont pas closes par complémentation.
- Pour tout langage $\mathcal{L} \in \Sigma^\omega$, $\mathcal{L} \in F^R$ si et seulement si $\mathcal{L}^c \in G^R$ et $\mathcal{L} \in F_\sigma^R$ si et seulement si $\mathcal{L}^c \in G_\delta^R$.
- $\mathcal{B}(F^R) = \mathcal{B}(G^R) = F_\sigma^R \cap G_\delta^R$.
- $\mathcal{B}(F_\sigma^R) = \mathcal{B}(G_\delta^R) = \text{RAT}$.

La Figure V.1 présente la hiérarchie connue avant [3]. Elle compile les résultats de [67] et de [43]. Les résultats de [48] n'y sont pas inclus car le formalisme utilisé y est différent. Les flèches désignent des inclusions strictes entre classes, l'absence de chemin entre deux classes indique qu'elles sont incomparables.

V.2 Les conditions d'acceptation A, A', L et L'

Les langages de mots infinis sont un formalisme très utilisé dans la spécification et la vérification de processus infinis (serveurs réseau, démons d'un système d'exploitation...) [40, 39, 64]. Chaque lettre de l'alphabet correspond à une action du processus et un mot infini correspond donc à une exécution du programme. L'automate fini sous-jacent modélise les transitions du système, le langage des mots acceptés représente alors l'ensemble des exécutions correctes du programme. La condition d'acceptation utilisée permet donc de définir les exécutions valides via un ensemble d'états acceptants. Ces états correspondent à des états de contrôle du processus, ainsi la condition d'acceptation de Büchi (run, \sqcap) s'interprète par le fait qu'une exécution est valide si elle passe infiniment souvent par un état de contrôle.

Dans [48], on considère des conditions d'acceptation basées sur le fait de passer par un ensemble d'états de contrôle, au moins une fois (condition A), ou infiniment souvent (condition L). Les conditions complémentaires sont également envisagées (conditions A' et L'). Nous allons voir que les conditions L et L' sont respectivement équivalentes aux conditions (ninf, \subseteq) et (ninf, \sqcap). Cependant, le cadre d'étude initial est restreint aux automates

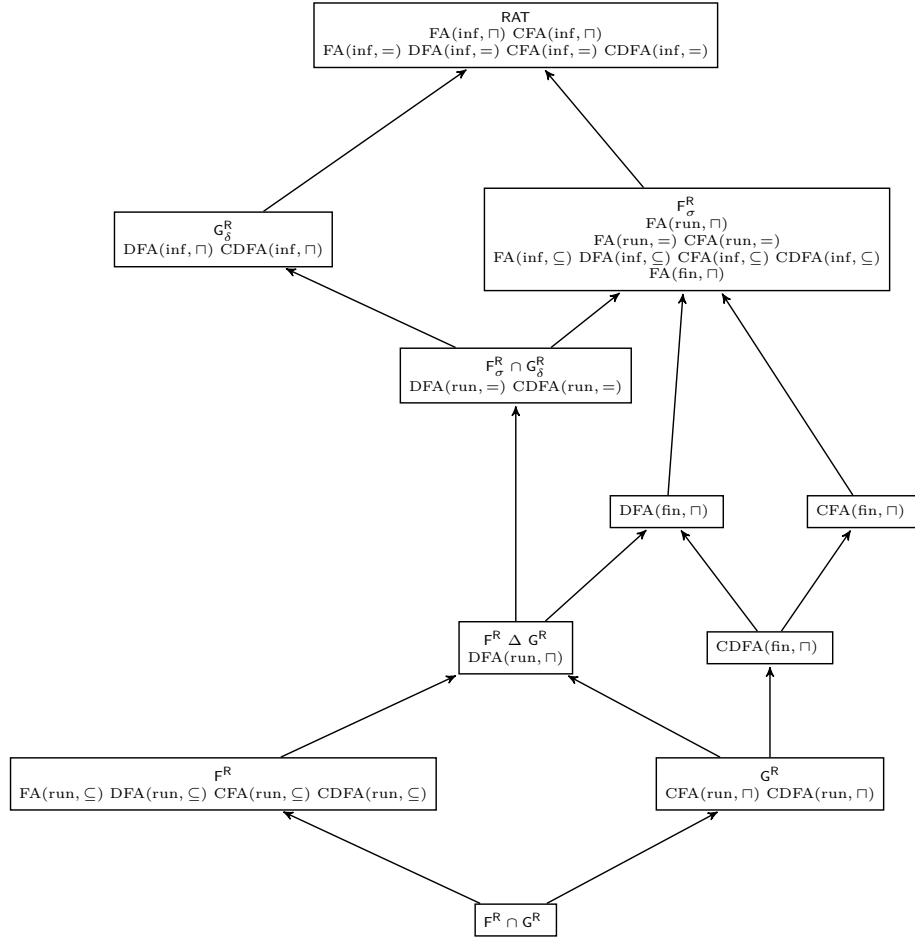


FIGURE V.1 – Hiérarchie des classes connues avant [3].

complets pour lesquels la table des états acceptants est réduite à un singleton. Nous reprenons l'étude de ces deux conditions dans le cadre plus général que nous nous sommes fixé. Dans un souci de complétude, nous reprenons également l'étude des conditions A et A'.

Définition V.9. Soient $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA et $p = (p_i, x_i, q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un chemin dans \mathcal{A} . Le chemin p est acceptant pour la condition A (respectivement A', L et L') si et seulement s'il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que

- (A) $F \subseteq \text{run}_{\mathcal{A}}(p)$,
- (A') $F \not\subseteq \text{run}_{\mathcal{A}}(p)$,
- (L) $F \subseteq \text{inf}_{\mathcal{A}}(p)$,
- (L') $F \not\subseteq \text{inf}_{\mathcal{A}}(p)$.

Des notations similaires à celles introduites dans la Définition V.2 sont utilisées pour désigner les classes de langages reconnues sous ces nouvelles

conditions d'acceptation.

Lemme V.10.

1. $\text{FA}(\mathcal{A}) \subseteq \text{FA}(\text{run}, \sqcap)$,
2. $\text{CFA}(\mathcal{A}) \subseteq \text{CFA}(\text{run}, \sqcap)$,
3. $\text{DFA}(\mathcal{A}) \subseteq \text{DFA}(\text{run}, \sqcap)$,
4. $\text{CDFA}(\mathcal{A}) \subseteq \text{CDFA}(\text{run}, \sqcap)$.

Démonstration. Nous allons prouver que tout langage reconnu sous la condition A est reconnu sous la condition (run, \sqcap) par un automate qui partage la même structure. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA, on définit l'automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q \times \mathcal{P}(Q), T', (q_0, \emptyset), \mathcal{F}')$ où

$$\begin{aligned} T' &= \{((p, S), a, (q, S \cup \{q\})) : (p, a, q) \in T, S \in \mathcal{P}(Q)\} \text{ ,} \\ \mathcal{F}' &= \{(q, S) : q \in Q, S \in \mathcal{P}(Q), \exists F \in \mathcal{F}, F \subseteq S\} \text{ .} \end{aligned}$$

Alors \mathcal{A}' est déterministe (resp. complet) si \mathcal{A} est déterministe (resp. complet).

Nous allons montrer que $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^A \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{run}, \sqcap)}$. Soit $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^A$, il existe un chemin initial $p = (p_i, x_i, p_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{A} et un ensemble $F \in \mathcal{F}$ tels que $F \subseteq \text{run}_{\mathcal{A}}(p)$. Le chemin

$$p' = \left(\left(p_i, \bigcup_{0 < j \leq i} \{p_j\} \right), x_i, \left(p_{i+1}, \bigcup_{0 < j \leq i+1} \{p_j\} \right) \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

est alors un chemin initial dans \mathcal{A}' étiqueté par x . Or, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{run}_{\mathcal{A}}(p) = \bigcup_{0 < j \leq n} \{p_j\}$. On en déduit que $(p_n, \text{run}_{\mathcal{A}}(p)) \in \text{run}_{\mathcal{A}'}(p')$. Comme $\{(p_n, \text{run}_{\mathcal{A}}(p))\} \in \mathcal{F}'$, $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{run}, \sqcap)}$.

Nous allons montrer que $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{run}, \sqcap)} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^A$. Soit $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{run}, \sqcap)}$, il existe alors un chemin initial $p = ((p_i, S_i), x_i, (p_{i+1}, S_{i+1}))_{i \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{A}' et un ensemble $F' = \{(q, S)\} \in \mathcal{F}'$ tels que $\text{run}_{\mathcal{A}'}(p') \cap F' \neq \emptyset$. Il existe donc $F \in \mathcal{F}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $F \subseteq S$ et $S = \bigcup_{0 < j \leq n} \{p_j\}$. Le chemin $p = (p_i, x_i, p_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ est donc un chemin initial dans \mathcal{A} étiqueté par x et $F \subseteq S \subseteq \text{run}_{\mathcal{A}}(p)$. Donc $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^A$. \square

Lemme V.11.

1. $\text{FA}(\text{run}, \sqcap) \subseteq \text{FA}(\mathcal{A})$,
2. $\text{CFA}(\text{run}, \sqcap) \subseteq \text{CFA}(\mathcal{A})$,
3. $\text{DFA}(\text{run}, \sqcap) \subseteq \text{DFA}(\mathcal{A})$,
4. $\text{CDFA}(\text{run}, \sqcap) \subseteq \text{CDFA}(\mathcal{A})$.

Démonstration. Nous allons prouver que tout langage reconnu sous la condition (run, \sqcap) est reconnu sous la condition A par un automate qui partage la même structure. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA, on définit l'automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F}')$ où $\mathcal{F}' = \{\{q\} : q \in Q, \exists F \in \mathcal{F}, q \in F\}$. Clairement $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{run}, \sqcap)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{run}, \sqcap)}$, de plus, \mathcal{A}' est déterministe (resp. complet) si \mathcal{A} est déterministe (resp. complet). Comme \mathcal{F}' n'est composé que de singletons,

$$\forall X \in \mathcal{P}(Q), \forall F \in \mathcal{F}', X \sqcap F \Leftrightarrow F \subseteq X ,$$

ce qui prouve que $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{run}, \sqcap)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(A)}$. □

Lemme V.12.

1. $\text{FA}(\mathcal{A}') \subseteq \text{FA}(\text{run}, \subseteq)$,
2. $\text{CFA}(\mathcal{A}') \subseteq \text{CFA}(\text{run}, \subseteq)$,
3. $\text{DFA}(\mathcal{A}') \subseteq \text{DFA}(\text{run}, \subseteq)$,
4. $\text{CDFA}(\mathcal{A}') \subseteq \text{CDFA}(\text{run}, \subseteq)$.

Démonstration. Nous allons prouver que tout langage reconnu sous la condition A' est reconnu sous la condition (run, \subseteq) par un automate qui partage la même structure. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA, on définit l'automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', T', (q_0, \emptyset), \mathcal{F}')$ où $Q' = (Q \times \mathcal{P}(Q)) \cup \{\perp\}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{P}(Q \times \mathcal{P}(Q))$, et

$$\begin{aligned} T' = & \{((p, S), a, (q, S \cup \{q\})) : (p, a, q) \in T, S \in \mathcal{P}(Q), \exists F \in \mathcal{F}, F \not\subseteq S \cup \{q\}\} \\ & \cup \{((p, S), a, \perp) : S \in \mathcal{P}(Q), \exists q \in Q, (p, a, q) \in T, \forall F \in \mathcal{F}, F \subseteq S \cup \{q\}\} \\ & \cup \{(\perp, a, \perp) : a \in \Sigma\} . \end{aligned}$$

Alors \mathcal{A}' est déterministe (resp. complet) si \mathcal{A} est déterministe (resp. complet). De plus, $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{A'}$ si et seulement s'il existe un chemin initial p dans \mathcal{A} étiqueté par x et un ensemble $F \in \mathcal{F}$ tel que $F \not\subseteq \text{run}_{\mathcal{A}}(p)$ si et seulement s'il existe un chemin initial p' dans \mathcal{A}' étiqueté par x tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p'_n \neq \perp$ si et seulement si $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{run}, \subseteq)}$. □

Lemme V.13.

1. $\text{FA}(\text{run}, \subseteq) \subseteq \text{FA}(\mathcal{A}')$,
2. $\text{CFA}(\text{run}, \subseteq) \subseteq \text{CFA}(\mathcal{A}')$,
3. $\text{DFA}(\text{run}, \subseteq) \subseteq \text{DFA}(\mathcal{A}')$,
4. $\text{CDFA}(\text{run}, \subseteq) \subseteq \text{CDFA}(\mathcal{A}')$.

Démonstration. Nous allons prouver que tout langage reconnu sous la condition (run, \subseteq) est reconnu sous la condition A' par un automate qui partage

la même structure. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA, on définit l'automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', T', (q_0, \emptyset), \mathcal{F}')$ où $Q' = (Q \times \mathcal{P}(Q)) \cup \{\perp\}$, $\mathcal{F}' = \{\{\perp\}\}$, et

$$\begin{aligned} T' = & \{((p, S), a, (q, S \cup \{q\})) : (p, a, q) \in T, S \in \mathcal{P}(Q), \exists F \in \mathcal{F}, S \cup \{q\} \subseteq F\} \\ & \cup \{((p, S), a, \perp) : S \in \mathcal{P}(Q), \exists q \in Q, (p, a, q) \in T, \forall F \in \mathcal{F}, S \cup \{q\} \not\subseteq F\} \\ & \cup \{(\perp, a, \perp) : a \in \Sigma\} . \end{aligned}$$

Alors \mathcal{A}' est déterministe (resp. complet) si \mathcal{A} est déterministe (resp. complet). De plus, $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{run}, \subseteq)}$ si et seulement s'il existe un chemin initial p dans \mathcal{A} étiqueté par x et un ensemble $F \in \mathcal{F}$ tel que $\text{run}_{\mathcal{A}}(p) \subseteq F$ si et seulement s'il existe un chemin initial p' dans \mathcal{A}' étiqueté par x tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p'_n \neq \perp$ si et seulement si $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{A'}$. \square

Proposition V.14.

1. $\text{CDFA}(\mathcal{A}) = \text{CFA}(\mathcal{A}) = \mathbf{G}^R$,
2. $\text{DFA}(\mathcal{A}) = \mathbf{F}^R \Delta \mathbf{G}^R$,
3. $\text{FA}(\mathcal{A}) = \mathbf{F}_{\sigma}^R$,
4. $\text{CDFA}(\mathcal{A}') = \text{DFA}(\mathcal{A}') = \text{CFA}(\mathcal{A}') = \text{FA}(\mathcal{A}') = \mathbf{F}^R$.

Démonstration. C'est une conséquence des Lemmes V.10, V.11, V.12 et V.13 et des résultats connus sur les classes induites par les conditions (run, \sqcap) et (run, \subseteq) (voir Figure V.1). \square

Remarque V.15. Les langages de $\text{CDFA}(\mathcal{A})$ (resp. $\text{CDFA}(\mathcal{A}')$) sont des unions finies de langages de la classe \mathbb{A} (resp. \mathbb{A}') définie dans [48]. Cette classe égale \mathbf{G}^R (resp. \mathbf{F}^R) qui est stable par union finie (Proposition V.8). On pouvait déjà conclure que $\text{CDFA}(\mathcal{A}) = \mathbf{F}^R$ (resp. $\text{CDFA}(\mathcal{A}') = \mathbf{G}^R$).

Nous avons entièrement caractérisé les classes induites par les conditions A et A'. Nous reprenons maintenant l'étude pour les classes induites par L et L'.

Proposition V.16. *Les conditions L et (ninf, \subseteq) d'une part, L' et (ninf, \sqcap) d'autre part, définissent les mêmes classes de langages.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA, on définit un nouvel automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F}')$ où $\mathcal{F}' = \{F^c : F \in \mathcal{F}\}$. Alors, \mathcal{A}' est déterministe (resp. complet) si \mathcal{A} est déterministe (resp. complet). De plus les égalités suivantes sont vérifiées et permettent de conclure :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^L = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{ninf}, \subseteq)}, \quad \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{ninf}, \subseteq)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^L, \quad \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{ninf}, \sqcap)}, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{ninf}, \sqcap)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{L'} .$$

\square

Ajouter un état puits pour compléter un automate ne change pas les langages reconnus sous la condition \mathcal{L} . On en déduit immédiatement le Lemme V.17.

Lemme V.17. $\text{FA}(\mathcal{L}) = \text{CFA}(\mathcal{L})$ et $\text{DFA}(\mathcal{L}) = \text{CDFA}(\mathcal{L})$.

Lemme V.18. $\text{DFA}(\mathcal{L}) \subseteq \mathbf{G}_\delta^{\mathbf{R}}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un DFA, pour tout $q \in Q$, on pose $\mathcal{A}_q = (\Sigma, Q, T, q_0, \{\{q\}\})$. Les chemins dans tous ces automates sont les mêmes, seule la table d'états acceptants change. Soit $x \in \Sigma^\omega$, par déterminisme, il existe au plus un chemin étiqueté par x dans \mathcal{A} . Donc x est l'étiquette d'un chemin dans \mathcal{A} qui passe infiniment souvent par un ensemble d'états $F \subseteq Q$ si et seulement si, pour tout $q \in F$, x est l'étiquette d'un chemin dans \mathcal{A} passant infiniment souvent par q ; il s'agit en fait du même chemin. Autrement dit,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{L}} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \bigcap_{q \in F} \mathcal{L}_{\mathcal{A}_q}^{(\text{inf}, \sqcap)}.$$

Comme $\text{DFA}(\text{inf}, \sqcap) = \mathbf{G}_\delta^{\mathbf{R}}$ est stable par union et intersection finies (Proposition V.8), on en déduit que $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{L}} \in \mathbf{G}_\delta^{\mathbf{R}}$. \square

Lemme V.19. $\text{DFA}(\text{inf}, \sqcap) \subseteq \text{DFA}(\mathcal{L})$ et $\text{FA}(\text{inf}, \sqcap) \subseteq \text{FA}(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA, on définit un nouvel automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F}')$ où $\mathcal{F}' = \{\{q\} : \exists F \in \mathcal{F}, q \in F\}$. Alors, \mathcal{A}' est déterministe si et seulement si \mathcal{A} est déterministe. Il est clair que $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{inf}, \sqcap)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{L}}$, d'où le résultat. \square

Proposition V.20.

1. $\text{CDFA}(\text{ninf}, \subseteq) = \text{DFA}(\text{ninf}, \subseteq) = \mathbf{G}_\delta^{\mathbf{R}}$,
2. $\text{CFA}(\text{ninf}, \subseteq) = \text{FA}(\text{ninf}, \subseteq) = \text{RAT}$.

Démonstration. La première égalité se déduit des Lemmes V.17, V.18 et V.19, de la Proposition V.16 et du fait que $\text{DFA}(\text{inf}, \sqcap) = \mathbf{G}_\delta^{\mathbf{R}}$. La seconde égalité se déduit des Lemmes V.17 et V.19, des Propositions V.7 et V.16 et du fait que $\text{FA}(\text{inf}, \sqcap) = \text{RAT}$. \square

Nous allons maintenant caractériser les classes induites par la condition \mathcal{L}' . Pour ce faire, nous allons commencer par prouver un lemme qui permet restreindre de la forme des automates envisagés pour la reconnaissance sous la condition \mathcal{L}' . Ainsi, on pourra toujours considérer que la table des états acceptants d'un tel automate est constituée d'un seul ensemble singleton.

Lemme V.21. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA alors il existe un automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', T', q'_0, \mathcal{F}')$ tel que $\mathcal{F}' = \{\{q\}\}$ pour un état $q \in Q'$, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{L'}$ et \mathcal{A}' est déterministe (resp. complet) si \mathcal{A} est déterministe (resp. complet).

Démonstration. Si $\mathcal{F} = \{\}$ ou $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ alors $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'} = \emptyset$. L'automate \mathcal{A}' défini par $Q' = \{\perp\}$, $T' = \{(\perp, a, \perp) : a \in \Sigma\}$, $q'_0 = \perp$ et $\mathcal{F}' = \{\{\perp\}\}$ vérifie les conditions demandées.

Dans le cas contraire, $F := \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$ est non-vide, on se donne alors un élément $f \in F$. On définit l'automate \mathcal{A}' par $Q' = Q \times \mathcal{P}(F)$, $q'_0 = (q_0, \emptyset)$, $\mathcal{F}' = \{\{(f, F)\}\}$, et

$$T' = \{((p, S), a, (q, (S \cup \{q\}) \cap F)) : (p, a, q) \in T, (p, S) \neq (f, F)\} \\ \cup \{((f, F), a, (q, \emptyset)) : (f, a, q) \in T\}.$$

L'automate \mathcal{A}' est déterministe (resp. complet) si \mathcal{A} est déterministe (resp. complet).

Soit $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'}$, il existe un chemin initial $p = (p_i, x_i, p_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{A} , $X \in \mathcal{F}$ et $q \in X$ tels que $q \notin \inf_{\mathcal{A}}(p)$. On construit alors le chemin initial $p' = ((p_i, S_i), x_i, (p_{i+1}, S_{i+1}))_{i \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{A}' où $S_0 = \emptyset$ et

$$\forall i \in \mathbb{N}, S_{i+1} = \begin{cases} (S_i \cup \{p_{i+1}\}) \cap F & \text{si } (p_i, S_i) \neq (f, F) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'état (f, F) apparaît finiment souvent dans le chemin p' car $q \in F$ et $q \notin \inf_{\mathcal{A}}(p)$. Le chemin p' est donc acceptant pour la condition L' et $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{L'}$.

Soit $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{L'}$, il existe un chemin initial $p = ((p_i, S_i), x_i, (p_{i+1}, S_{i+1}))_{i \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{A}' tel que l'état (f, F) n'est pas visité infiniment souvent. Il existe donc $q \in F$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout entier $i > n$, $p_i \neq q$. Comme $q \in F$, il existe $X \in \mathcal{F}$ tel que $q \in X$. Finalement, le chemin $p' = (p_i, x_i, p_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ est un chemin initial dans \mathcal{A} étiqueté par x et $q \notin \inf_{\mathcal{A}}(p')$ d'où $X \not\subseteq \inf_{\mathcal{A}}(p')$. Le chemin p' est donc acceptant pour la condition L' et $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'}$.

On obtient ainsi la double inclusion et donc l'égalité des langages $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{L'}$. \square

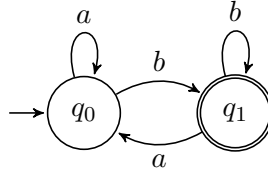
On suppose ici dans un souci de simplicité, et sans perte de généralité, que $\Sigma = \{a, b\}$.

Proposition V.22. La classe \mathbf{F}^R est incluse dans $\text{CDFA}(L')$.

Démonstration. D'après la Proposition V.21, la classe $\text{CDFA}(L')$ est égale à la classe \mathbb{L}' définie dans [48]. Il est connu que $\mathbf{F}^R \subseteq \mathbb{L}'$. \square

Lemme V.23. Le langage $\mathcal{L} = (a + b)^* a^\omega$ est dans $\text{CDFA}(L') \setminus \mathbf{G}_\delta^R$.

Démonstration. Dans [48], il est prouvé que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'}$ pour le CDFA \mathcal{A} représenté à la Figure V.2. De plus, c'est un exemple typique de langage dans $\mathbf{F}_\sigma^R \setminus \mathbf{G}_\delta^R$ [41]. \square

FIGURE V.2 – Un CDFA reconnaissant $(a + b)^* a^\omega$ sous la condition L' .

Lemme V.24. *Le langage $\mathcal{L} = ab^*a(a + b)^\omega$ est dans $\text{DFA}(L') \setminus \text{CFA}(L')$.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'}$ pour le DFA \mathcal{A} représenté à la Figure V.3.

Supposons par l'absurde qu'il existe un CFA $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ tel que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{L'}$. D'après le Lemme V.21, on peut supposer que $\mathcal{F} = \{\{f\}\}$ pour $f \in Q$. On note $n = \text{Card}(Q)$.

Le mot $x = ab^n a^\omega$ appartient à \mathcal{L} , il existe donc un chemin initial $p = (p_k, x_k, p_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $k > m$, $p_k \neq f$. Comme Q est de cardinal n , il existe des entiers i et j tels que $1 \leq i < j \leq n + 1$ et $p_i = p_j$. Le chemin

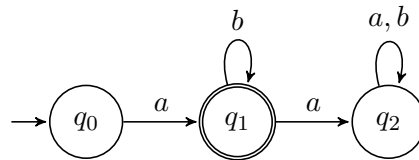
$$p_0 \xrightarrow{a} p_1 \xrightarrow{b} p_2 \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} p_i \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} p_j = p_i \xrightarrow{b} p_{i+1} \xrightarrow{b} \dots$$

est un chemin initial étiqueté par $ab^\omega \notin \mathcal{L}$. Il existe donc un entier h tel que $i \leq h \leq j$ et $p_h = f$. Comme \mathcal{A}' est complet, il existe un chemin initial $p' = (p'_k, b, p'_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ étiqueté par $b^\omega \notin \mathcal{L}$. On en déduit qu'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $p'_l = f$. Le chemin

$$p'_0 \xrightarrow{b} p'_1 \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} p'_l = f = p_h \xrightarrow{b} p_{h+1} \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} p_{n+1} \xrightarrow{a} p_{n+2} \xrightarrow{a} \dots$$

est un chemin initial, étiqueté par $b^{l+n-h+1}a^\omega \notin \mathcal{L}$ et acceptant pour la condition L' .

Nous obtenons une contradiction, ce qui prouve que $\mathcal{L} \notin \text{CFA}(L')$. \square

FIGURE V.3 – Un DFA reconnaissant $ab^*a(a + b)^\omega$ sous la condition L' .

Lemme V.25. *Le langage $\mathcal{L} = (a + b)^* ba^\omega$ est dans $\text{CFA}(L') \setminus \text{DFA}(L')$.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'}$ pour le CFA \mathcal{A} représenté à la Figure V.4.

Supposons par l'absurde qu'il existe un DFA $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ tel que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{L'}$. D'après le Lemme V.21, on peut supposer que $\mathcal{F} = \{\{f\}\}$ pour $f \in Q$. On note $n = \text{Card}(Q)$.

Le mot $x = a^n b a^\omega$ appartient à \mathcal{L} , il existe donc un chemin initial $p = (p_k, x_i, p_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout entier $k > m$, $p_k \neq f$. Comme Q est de cardinal n , il existe des entiers i et j tels que $0 \leq i < j \leq n$ et $p_i = p_j$. Le chemin

$$p_0 \xrightarrow{a} p_1 \xrightarrow{a} p_2 \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} p_i \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} p_j = p_i \xrightarrow{a} p_{i+1} \xrightarrow{a} \dots$$

est un chemin initial étiqueté par $a^\omega \notin \mathcal{L}$. Il existe donc un entier h tel que $i \leq h \leq j$ et $p_h = f$.

Le mot $y = b^{n+1} a^\omega$ appartient à \mathcal{L} , il existe donc un chemin initial $p' = (p'_k, y_i, p'_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ acceptant pour la condition L' . Comme Q est de cardinal n , il existe des entiers i' et j' tels que $1 \leq i' < j' \leq n+1$ et $p'_{i'} = p'_{j'}$. Le chemin

$$p'_0 \xrightarrow{b} p'_1 \xrightarrow{b} p'_2 \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} p'_{i'} \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} p'_{j'} = p'_{i'} \xrightarrow{b} p'_{i'+1} \xrightarrow{b} \dots$$

est un chemin initial étiqueté par $b^\omega \notin \mathcal{L}$. Il existe donc un entier h' tel que $i' \leq h' \leq j'$ et $p'_{h'} = f$.

Finalement, le chemin

$$p'_0 \xrightarrow{b} p'_1 \xrightarrow{b} p'_2 \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} p'_{h'} = f = p_h \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} p_j = p_i \xrightarrow{a} p_{i+1} \xrightarrow{a} \dots$$

est un chemin initial, étiqueté par $b^{h'} a^\omega \in \mathcal{L}$ et non acceptant pour la condition L' . Or \mathcal{A}' est déterministe, donc il n'existe pas d'autre chemin étiqueté par $b^{h'} a^\omega$ et $b^{h'} a^\omega \notin \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{L'}$. Nous avons une contradiction, ce qui prouve que $\mathcal{L} \notin \text{DFA}(L')$. \square

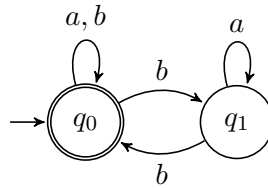


FIGURE V.4 – Un CFA reconnaissant $(a + b)^* b a^\omega$ sous la condition L' .

Proposition V.26. *Les classes $\text{DFA}(L')$ et $\text{CFA}(L')$ sont incomparables.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des Lemmes V.24 et V.25. \square

Lemme V.27. *Le langage $\mathcal{L} = b^*ab^*a(a+b)^\omega$ est dans $G^R \setminus \text{FA}(L')$.*

Démonstration. Il est connu que tout langage de cette forme est dans G^R [67]. On peut prouver que $\mathcal{L} \notin \text{FA}(L')$ de manière similaire à la preuve du Lemme V.24. \square

Proposition V.28. *La classe $\text{FA}(L')$ est incluse strictement dans F_σ^R .*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA. D'après le Lemme V.21, on peut supposer que $\mathcal{F} = \{\{f\}\}$ pour $f \in Q$. On définit l'automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q, T, q_0, \{Q \setminus \{f\}\})$. Alors, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{L'} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{inf}, \subseteq)}$ et $\text{FA}(L') \subseteq \text{FA}(\text{inf}, \subseteq)$. Or, il est connu que $\text{FA}(\text{inf}, \subseteq) = F_\sigma^R$ [66]. L'inclusion stricte est donnée par le Lemme V.27. \square

Proposition V.29. *La classe $\text{FA}(L')$ est incomparable avec G^R et G_δ^R .*

Démonstration. D'après le Lemme V.23, $(a+b)^*a^\omega \in \text{CDFA}(L') \setminus G_\delta^R$. D'après le Lemme V.27, $b^*ab^*a(a+b)^\omega \in G^R \setminus \text{FA}(L')$. On conclut par le fait que $\text{CDFA}(L') \subseteq \text{FA}(L')$ et $G^R \subseteq G_\delta^R$. \square

Proposition V.30 (Litovsky et Staiger [43]). *Les classes $\text{CDFA}(L')$ et $\text{DFA}(\text{fin}, \sqcap)$ sont incomparables.*

Les Propositions V.26, V.28, V.29 et V.30 permettent de compléter la Figure V.1 avec les classes induites par les conditions L et L', c'est-à-dire les classes induites par (ninf, \sqcap) et (ninf, \subseteq) d'après la Proposition V.16. Pour finir l'étude des classes induites par les conditions basées sur ninf , il est à noter que les classes induites par $(\text{ninf}, =)$ sont égales à celles induites par $(\text{inf}, =)$. La hiérarchie est complétée à la Figure V.6.

V.3 Modes d'acceptation basés sur fin

Dans cette section, nous nous intéressons aux classes de langages induites par les conditions (fin, \subseteq) et $(\text{fin}, =)$. Les classes induites par la condition (fin, \sqcap) ont déjà été étudiées dans [43]. Nous allons entièrement caractériser la classe $\text{CDFA}(\text{fin}, =)$ et obtenir plusieurs résultats partiels sur les autres classes induites par ces conditions.

Il est possible de compléter les automates utilisant les conditions de reconnaissance (fin, \subseteq) et $(\text{fin}, =)$ sans modifier le langage reconnu. A la différence de la construction classique sur les conditions de Büchi ou de Muller, il est nécessaire d'ajouter deux états à l'automate pour y parvenir, comme le montre la preuve de la Proposition V.31.

Proposition V.31.

- $\text{DFA}(\text{fin}, \subseteq) = \text{CDFA}(\text{fin}, \subseteq)$,
- $\text{FA}(\text{fin}, \subseteq) = \text{CFA}(\text{fin}, \subseteq)$,

- $\text{DFA}(\text{fin}, =) = \text{CDFA}(\text{fin}, =)$ et
- $\text{FA}(\text{fin}, =) = \text{CFA}(\text{fin}, =)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA, on définit le nouvel automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q \cup \{\perp, \perp'\}, T', q_0, \mathcal{F})$ où

$$T' = T \cup \{(p, a, \perp) : p \in Q, a \in \Sigma, \forall q \in Q, (p, a, q) \notin T\} \\ \cup \{(\perp, a, \perp') : a \in \Sigma\} \cup \{(\perp', a, \perp') : a \in \Sigma\}.$$

L'automate \mathcal{A}' est complet, de plus il est déterministe si et seulement si \mathcal{A} est déterministe. Comme on ne fait qu'ajouter des états et des transitions pour passer de \mathcal{A} à \mathcal{A}' sans modifier la table des états acceptants, tout chemin acceptant dans \mathcal{A} pour (fin, \subseteq) ou $(\text{fin}, =)$ est acceptant dans \mathcal{A}' pour la même condition. Si p est un chemin dans \mathcal{A}' qui n'existe pas pour \mathcal{A} , alors p passe une fois par l'état \perp avant d'entrer dans l'état puits \perp' . Comme pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\perp \notin F$, p n'est acceptant pour aucune des conditions (fin, \subseteq) ou $(\text{fin}, =)$. Finalement, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{fin}, \subseteq)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{fin}, \subseteq)}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{fin}, =)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{fin}, =)}$. \square

Proposition V.32 (Staiger [59]).

- $\text{DFA}(\text{fin}, \subseteq) \subseteq \text{DFA}(\text{fin}, =)$ et
- $\text{FA}(\text{fin}, \subseteq) \subseteq \text{FA}(\text{fin}, =)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA, on définit le nouvel automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q, T, q_0, \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{P}(F))$. L'automate \mathcal{A}' est déterministe si et seulement si \mathcal{A} est déterministe. Il est clair que $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{fin}, \subseteq)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{fin}, =)}$, d'où le résultat. \square

Proposition V.33 (Staiger [59]).

- $\text{DFA}(\text{fin}, \sqcap) \subseteq \text{DFA}(\text{fin}, =)$ et
- $\text{FA}(\text{fin}, \sqcap) \subseteq \text{FA}(\text{fin}, =)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un FA, on définit le nouvel automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F}')$ où $\mathcal{F}' = \{F \in \mathcal{P}(Q) : \exists X \in \mathcal{F}, X \sqcap F\}$. Alors, l'automate \mathcal{A}' est déterministe si et seulement si \mathcal{A} est déterministe. Il est clair que $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{fin}, \sqcap)} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{fin}, =)}$, d'où le résultat. \square

Proposition V.34. $\text{FA}(\text{fin}, =) = \text{RAT}$.

Démonstration. D'après la Proposition V.7, $\text{FA}(\text{fin}, =) \subseteq \text{RAT}$. Il nous reste donc à montrer l'inclusion inverse. Nous allons prouver que tout langage reconnu sous la condition (inf, \sqcap) est reconnu sous la condition $(\text{fin}, =)$. Le fait que $\text{FA}(\text{inf}, \sqcap) = \text{RAT}$ nous permettra de conclure.

Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un automate fini, on définit le nouvel automate $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q \cup Q \times Q, T', q_0, \mathcal{F}')$ où

$$T' = T \cup \{(p, a, (q, p)) : (p, a, q) \in T\} \\ \cup \{((p_1, p_2), a, q) : (p_1, a, q) \in T, p_2 \in Q\}$$

et

$$\mathcal{F}' = \{X \setminus \{p_2\} \cup \{(p_1, p_2)\} : p_1 \in Q, X \in \mathcal{P}(Q), \exists F \in \mathcal{F}, p_2 \in F\} .$$

Soit $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{inf}, \sqcap)}$, il existe un chemin initial $p = (p_i, x_i, p_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{A} , un état $q \in \text{inf}_{\mathcal{A}}(p)$ et $F \in \mathcal{F}$ tels que $q \in F$. Soit $n > 0$ tel que $p_n = q$, on définit le chemin initial $p' = (p'_i, x_i, p'_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{A}' par

$$\forall i \in \mathbb{N}, p'_i = \begin{cases} p_i & \text{si } i \neq n+1 \\ (p_{n+1}, q) & \text{sinon} \end{cases} .$$

On a donc $\text{fin}_{\mathcal{A}'}(p') = \text{fin}_{\mathcal{A}}(p) \cup \{(p_{n+1}, q)\}$. Comme $q \in \text{inf}_{\mathcal{A}}(p)$, $\text{fin}_{\mathcal{A}'}(p')$ peut aussi s'écrire $\text{fin}_{\mathcal{A}}(p) \setminus \{q\} \cup \{(p_{n+1}, q)\} \in \mathcal{F}'$. Le chemin p' est acceptant pour la condition $(\text{fin}, =)$ et $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{fin}, =)}$.

Soit $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{(\text{fin}, =)}$, il existe un chemin initial $p = (p_i, x_i, p_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{A}' , des états q_1 et q_2 dans Q , et des ensembles $X \in \mathcal{P}(Q)$ et $F \in \mathcal{F}$ tels que $q_2 \in F$ et $\text{fin}_{\mathcal{A}'}(p) = X \setminus \{q_2\} \cup \{(q_1, q_2)\}$. On définit le chemin initial $p' = (p'_i, x_i, p'_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{A} par

$$\forall i \in \mathbb{N}, p'_i = \begin{cases} p_i & \text{si } p_i \in Q \\ a_i & \text{si } p_i = (a_i, b_i) \in Q \times Q \end{cases} .$$

Comme $(q_1, q_2) \in \text{fin}_{\mathcal{A}'}(p)$, $q_2 \in \text{run}_{\mathcal{A}'}(p)$. Or, par hypothèse, $q_2 \notin \text{fin}_{\mathcal{A}'}(p)$, donc $q_2 \in \text{inf}_{\mathcal{A}'}(p)$. Comme $\text{inf}_{\mathcal{A}'}(p) \cap Q \subseteq \text{inf}_{\mathcal{A}}(p')$, $q_2 \in \text{inf}_{\mathcal{A}}(p')$. Le chemin p' est acceptant pour la condition (inf, \sqcap) et $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{inf}, \sqcap)}$. \square

Nous venons de prouver que la classe des langages reconnus sous la condition $(\text{fin}, =)$ est égale à l'ensemble de tous les langages ω -rationnels. Dans le cas où l'on impose la reconnaissance par automate déterministe, la question est ouverte. Cependant la Proposition V.35 montre que cette classe est soit égale elle aussi à l'ensemble des langages ω -rationnels, soit est une classe distincte de toutes celles rencontrées précédemment.

Proposition V.35. *Le langage $\mathcal{L} = a(a^*b)^\omega + b(a+b)^*a^\omega$ appartient à $\text{DFA}(\text{fin}, =) \setminus (\text{F}_\sigma^{\text{R}} \cup \text{G}_\delta^{\text{R}})$.*

Démonstration. Il est prouvé dans [41] que $\mathcal{L} \notin \text{F}_\sigma^{\text{R}} \cup \text{G}_\delta^{\text{R}}$. De plus $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{fin}, =)}$ pour le CDFA

$$\mathcal{A} = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, T, q_0, \{\emptyset, \{q_2\}, \{q_3, q_4\}\}) ,$$

où l'ensemble des transitions est donné à la Figure V.5. \square

Proposition V.36. $\text{DFA}(\text{fin}, \subseteq) \subseteq \text{G}_\delta^{\text{R}}$.

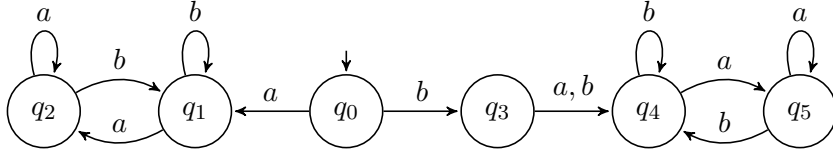


FIGURE V.5 – Un CDFA reconnaissant $a(a^*b)^\omega + b(a+b)^*a^\omega$ sous la condition $(\text{fin}, =)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, q_0, \mathcal{F})$ un DFA. Si S est un sous-ensemble de Q , on note \mathcal{A}_S l'automate déterministe $(\Sigma, Q, T, q_0, \{S\})$. On a alors

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{fin}, \subseteq)} = \bigcup_{S \subseteq Q, S' \subseteq Q, S \setminus S' \in \mathcal{F}} \left(\mathcal{L}_{\mathcal{A}_S}^{(\text{run}, \subseteq)} \cap \bigcap_{q \in S'} \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{\{q\}}}^{(\text{inf}, \sqcap)} \right)$$

Pour tout sous-ensemble S de Q , $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_S}^{(\text{run}, \subseteq)} \in \mathbf{F}^{\mathbf{R}} \subseteq \mathbf{G}_{\delta}^{\mathbf{R}}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_S}^{(\text{inf}, \sqcap)} \in \mathbf{G}_{\delta}^{\mathbf{R}}$. Comme $\mathbf{G}_{\delta}^{\mathbf{R}}$ est stable par intersection finie (Proposition V.8), pour tout sous-ensemble S de Q , $\bigcap_{q \in S} \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{\{q\}}}^{(\text{inf}, \sqcap)} \in \mathbf{G}_{\delta}^{\mathbf{R}}$. Comme $\mathbf{G}_{\delta}^{\mathbf{R}}$ est stable par union et intersection finies, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{(\text{fin}, =)} \in \mathbf{G}_{\delta}^{\mathbf{R}}$. \square

Nous avons réussi dans ce chapitre à caractériser plusieurs classes de langages et à les situer dans la hiérarchie déjà connue. Plusieurs d'entre elles coïncident avec des classes déjà étudiées, tandis que d'autres sont nouvelles. Les nouveaux résultats, ainsi que les résultats précédemment connus sont repris dans la Figure V.6. Il reste cependant des questions ouvertes : les classes induites par les conditions (fin, \subseteq) ainsi que la classe $\text{DFA}(\text{fin}, =)$ doivent encore être étudiées finement. Cette dernière est particulièrement intéressante car, si elle n'égale pas l'ensemble des langages ω -rationnels, elle définit une nouvelle classe de langages située relativement haut dans la hiérarchie (Proposition V.35). Enfin pour les nouvelles classes de langages induites par la condition (inf, \sqcap) , il est naturel de vouloir prolonger l'étude par la recherche d'éventuelles propriétés de clôture.

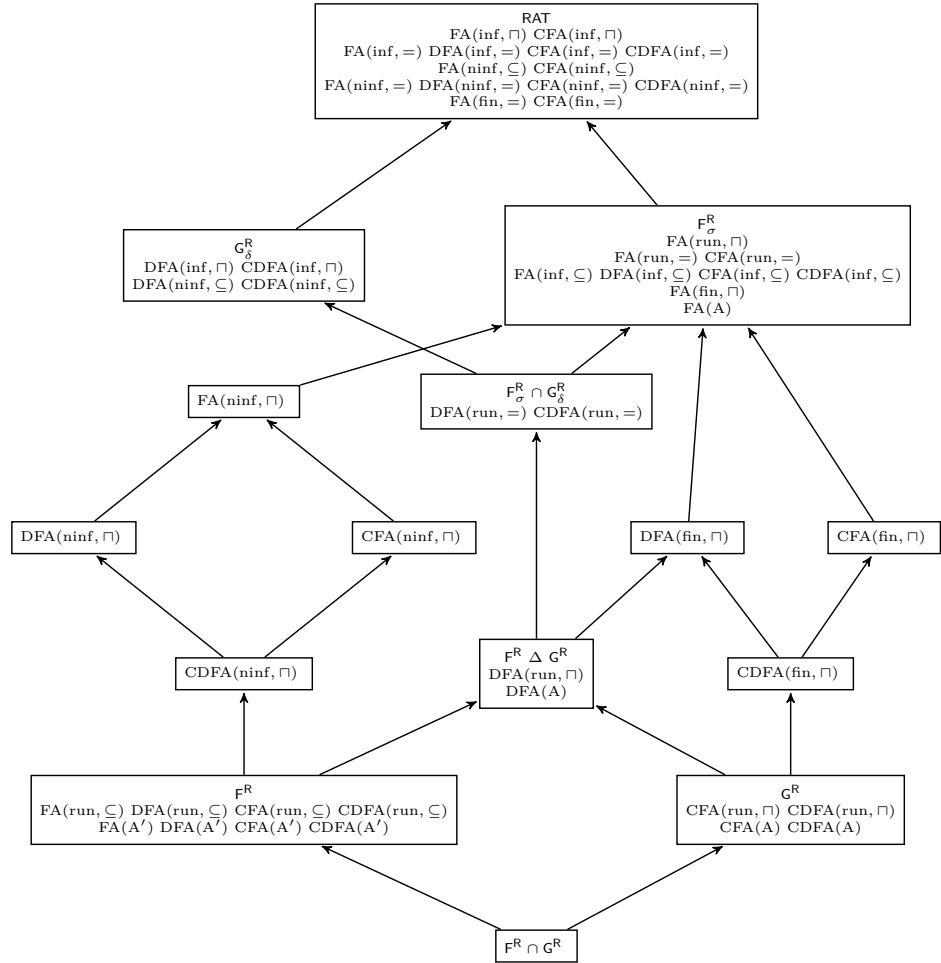


FIGURE V.6 – Hiérarchie des classes complétée.

Annexe A

Mots, langages et automates

Cette annexe est dédiée à des rappels de théorie des langages. Nous y considèrerons à la fois les langages de mots finis, de mots infinis et de mots bi-infinis. Pour des rappels plus poussés, on pourra se référer à [55].

Dans toute cette annexe, Σ désigne un ensemble fini appelé **alphabet**. Un **mot** sur Σ (respectivement un ω -**mot** et un ζ -**mot**) est une suite finie (respectivement infinie et bi-infinie) d'éléments de Σ . On note Σ^* (respectivement Σ^ω et Σ^ζ) l'ensemble des mots (respectivement ω -mots et ζ -mots) sur Σ . On pose $\Sigma^\infty = \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$.

Soient u et $v \in \Sigma^*$. On note $|u|$ la **taille** du mot u , c'est à dire le nombre de symboles qui composent u . On note ε le **mot vide**, c'est-à-dire l'unique mot de taille 0. Pour des entiers i et j tels que $0 \leq i \leq j < |u|$, on note $u_{[i,j]}$ le mot $u_i u_{i+1} \dots u_j$. Cette notation est également utilisée pour les ω -mots et les ζ -mots. Un tel mot est un **facteur** de u . On pourra rencontrer la notation $u_{[i,j]}$ avec $i > j$. Par convention ce mot est alors réduit au mot vide ε , ce qui implique que le mot vide est facteur de tout mot.

On note uv la **concaténation** des mots u et v , c'est à dire le mot

$$u_0 u_1 \dots u_{|u|-1} v_0 v_1 \dots v_{|v|-1} \ .$$

La concaténation est une opération associative admettant ε pour élément neutre sur $\Sigma^* \times \Sigma^*$, ce qui donne une structure de monoïde à Σ^* . La concaténation s'étend naturellement sur $\Sigma^* \times \Sigma^\infty$.

Un **langage** (respectivement un ω -**langage** et un ζ -**langage**) est un sous-ensemble de Σ^* (respectivement de Σ^ω et Σ^ζ).

Soient U et V deux langages. On note UV la **concaténation** des langages U et V ,

$$UV := \{uv : u \in U, v \in V\} \ .$$

Encore une fois la concaténation s'étend naturellement au cas où V est un ω -langage. On pose $U^0 = \{\varepsilon\}$ et pour tout entier $k > 0$, $U^k = UU^{k-1}$. On

appelle **fermeture de Kleene** de U et on note U^* l'ensemble

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U^k .$$

On note

$$U^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} U^k = U^* \setminus \{\varepsilon\} = UU^* .$$

Définition A.1. La classe *RAT* des **langages rationnels** sur Σ est le plus petit sous-ensemble de langages de Σ^* tel que

1. *RAT* contient l'ensemble vide et les singletons $\{a\}$ pour tout élément a de Σ ,
2. *RAT* est stable par union, concaténation et fermeture de Kleene.

Les langages rationnels sont décrits par des **expressions rationnelles**. Une expression rationnelle est un terme de la grammaire

$$\text{Exp} := \emptyset, a \in A, (\text{Exp}), \text{Exp} + \text{Exp}, \text{ExpExp}, \text{Exp}^* .$$

Le langage associé à une expression rationnelle e est noté $[e]$ et est défini par

- $[\emptyset] = \emptyset$,
- $[a] = \{a\}$,
- $[(e)] = [e]$,
- $[e_1 + e_2] = [e_1] \cup [e_2]$,
- $[e_1 e_2] = [e_1][e_2]$ et
- $[e^*] = [e]^*$.

Exemple A.2. L'expression $(a^*b)(a+b)^*$ dénote le langage des mots (sur $\{a, b\}$) qui contiennent au moins un b . Ce langage est également dénoté par l'expression $(a+b)^*b(a+b)^*$.

Définition A.3. Un **automate fini** est un quintuplet $(\Sigma, Q, T, I, \mathcal{F})$ où

- Σ est un ensemble fini, l'**alphabet** de l'automate,
- Q est un ensemble fini appelé l'ensemble des **états** de l'automate,
- $T \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ est l'ensemble des **transitions** de l'automate,
- $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états **initiaux**,
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Q)$ est la table des états **acceptants**.

Dans de nombreux cas, l'ensemble des états initiaux est réduit à un seul état ; dans ce cas l'automate est noté $(\Sigma, Q, T, i, \mathcal{F})$ où i est l'unique état initial. De même la table des états acceptants est souvent réduite à un singleton, l'automate est alors noté (Σ, Q, T, I, F) où F est l'ensemble des états acceptants.

Définition A.4. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, I, \mathcal{F})$ un automate fini.

Un **chemin** dans \mathcal{A} est une suite de transitions $(p_i, u_i, q_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que pour tout entier $i \in [0, n-1]$, $q_i = p_{i+1}$. Le mot u est l'**étiquette** du chemin. Si $p_0 \in I$, le chemin est dit **initial**. La notion de chemin s'étend aux chemins infinis ou bi-infinis.

La **fonction de transition** de \mathcal{A} est la fonction $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ définie par

$$\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, \delta(q, a) = \{q' \in Q : (q, a, q') \in T\} \quad .$$

La fonction de transition δ s'étend sur les mots en une fonction δ' telle que

$$\forall q \in Q, \delta'(q, \varepsilon) = q \quad ,$$

et

$$\forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma, \delta'(q, au) = \bigcup_{q' \in \delta(q, a)} \delta'(q', u) \quad .$$

Par la suite, on confond les fonctions δ et δ' . L'ensemble $\delta(q, u)$ est l'ensemble des états q' tels qu'il existe un chemin de q à q' étiqueté par le mot u .

Définition A.5. Soient $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, I, \mathcal{F})$ un automate fini et δ sa fonction de transition,

- \mathcal{A} est **déterministe** si $\text{Card}(I) = 1$ et si

$$\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, \text{Card}(\{q' \in Q : (q, a, q') \in T\}) \leq 1 \quad ;$$

ce qui est équivalent à

$$\forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \text{Card}(\delta(q, u)) \leq 1 \quad .$$

- \mathcal{A} est **complet** si

$$\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, \text{Card}(\{q' \in Q : (q, a, q') \in T\}) \geq 1 \quad ;$$

ce qui est équivalent à

$$\forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \text{Card}(\delta(q, u)) \geq 1 \quad .$$

Remarque A.6. Si \mathcal{A} est à la fois complet et déterministe, la fonction δ est donc une fonction de $Q \times \Sigma^*$ dans Q .

Dans toute la suite, les automates considérés contiennent une table des états acceptants réduite à un singleton noté F .

Définition A.7. Un mot $u \in \Sigma^*$ est **reconnu** par un automate $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, I, F)$ si

$$\exists i \in I, \delta(i, u) \cap F \neq \emptyset$$

et le **langage** $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ de l'automate est l'ensemble des mots reconnus par \mathcal{A} . Il existe donc un chemin initial finissant dans F étiqueté par u , un tel chemin est dit **acceptant**.

Théorème A.8. *Tout langage reconnu par un automate est reconnu par un automate déterministe complet.*

Théorème A.9. *Un langage est reconnaissable si et seulement s'il est rationnel.*

Théorème A.10. *Les langages rationnels sont stables par union finie, intersection finie et complémentation.*

Définition A.11. Soit U un langage, l'**omega-puissance** de U est l' ω -langage

$$U^\omega := \{u_0 u_1 u_2 \dots : \forall i \in \mathbb{N}, u_i \in U \setminus \{\varepsilon\}\} .$$

Définition A.12. Un ω -langage \mathcal{L} est **ω -rationnel** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des langages rationnels $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que

$$\mathcal{L} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i V_i^\omega .$$

Définition A.13. Un mot infini $x \in \Sigma^\omega$ est **reconnu** par un automate $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, I, F)$ s'il existe un chemin initial $(p_i, x_i, q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que

$$\text{Card}(\{i \in \mathbb{N} : p_i \in F\}) = \infty$$

et l' **ω -langage** $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A})$ de l'automate est l'ensemble des ω -mots reconnus par \mathcal{A} . Un tel chemin est dit **acceptant** pour le mot x .

Cette condition d'acceptation pour ω -mots est connue sous le nom de condition de Büchi. Il existe d'autres conditions d'acceptation pour les ω -mots.

Théorème A.14. *Un ω -langage est reconnaissable si et seulement s'il est ω -rationnel.*

Théorème A.15. *Les langages ω -rationnels sont stables par union finie, intersection finie et complémentation.*

Par contre, il n'y a pas d'équivalent au Théorème A.8. Il existe des langages ω -rationnels qui ne sont pas reconnus par des automates déterministes sous condition de Büchi.

Définition A.16. Le **shift** (sur Σ^ζ) est la fonction $\sigma : \Sigma^\zeta \rightarrow \Sigma^\zeta$ définie par

$$\forall x \in \Sigma^\zeta, \forall i \in \mathbb{Z}, \sigma(x)_i = x_{i+1} \text{ .}$$

C'est une fonction inversible.

Si x et y sont des ω -mots, on note $\tilde{x}y$ le ζ -mot z tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}, z_i = y_i \text{ et } z_{-i-1} = x_i \text{ ,}$$

$$z = \dots x_2 x_1 x_0 y_0 y_1 y_2 \dots \text{ .}$$

Si U et V sont des ω -langages, on note $\tilde{U}V$ le ζ -langage

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma^k(\{\tilde{x}y : x \in U, y \in V\}) \text{ .}$$

Définition A.17. Un ζ -langage \mathcal{L} est **ζ -rationnel** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des langages ω -rationnels $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que

$$\mathcal{L} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \tilde{U}_i V_i \text{ .}$$

Tout langage ζ -rationnel est donc par définition shift-invariant.

Définition A.18. Un mot bi-infini $x \in \Sigma^\zeta$ est **reconnu** par un automate $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, T, I, F)$ s'il existe un chemin $(p_i, x_i, q_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tel que

$$\text{Card}(\{i \in \mathbb{N} : p_i \in F\}) = \infty \text{ et } \text{Card}(\{i \in \mathbb{N} : p_{-i} \in I\}) = \infty$$

et le **ζ -langage** $\mathcal{L}^\zeta(\mathcal{A})$ de l'automate est l'ensemble des ζ -mots reconnus par \mathcal{A} . Un tel chemin est dit **acceptant** pour le mot x .

Théorème A.19. *Un ζ -langage est reconnaissable si et seulement s'il est ζ -rationnel.*

Théorème A.20. *Les langages ζ -rationnels sont stables par union finie, intersection finie et complémentation.*

Tout comme pour les langages ω -rationnels, il n'y a pas d'équivalent au Théorème A.8.

Annexe B

Espaces de décalage

Dans cette annexe, nous faisons des rappels sur les espaces de décalage. Un espace de décalage peut être vu à la fois comme un langage pourvu de propriétés particulières ou comme un système dynamique simple. Nous ne considérerons que des espaces de décalage de mots bi-infinis. La plupart des définitions et propositions de cette annexe proviennent de [42] qui nous sert d'ouvrage de référence.

Nous reprenons les notations de l'Annexe A. Ainsi, Σ désigne un alphabet fini dont nous supposons qu'il contient au moins deux éléments distincts. Soit $\mathcal{F} \subseteq \Sigma^*$ un ensemble de mots finis de Σ . On note alors $X_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des mots bi-infinis dont aucun facteur n'est dans \mathcal{F} :

$$X_{\mathcal{F}} := \left\{ x \in \Sigma^{\mathbb{Z}} : \forall i, j \in \mathbb{Z}, x_{[i,j]} \notin \mathcal{F} \right\} .$$

Définition B.1. Un **espace de décalage** est un sous-ensemble $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ tel qu'il existe $\mathcal{F} \in \Sigma^*$ vérifiant $X = X_{\mathcal{F}}$. L'ensemble \mathcal{F} est alors un ensemble de **facteurs interdits** pour X .

Un espace de décalage peut être défini par plusieurs ensembles de facteurs interdits. Par exemple, soit $\mathcal{F} \in \Sigma^*$, on a alors

$$X_{\mathcal{F}} = X_{\Sigma\mathcal{F}} = X_{\mathcal{F}\Sigma} = X_{\Sigma^*\mathcal{F}\Sigma^*} .$$

Exemple B.2. L'ensemble $\Sigma^{\mathbb{Z}} = X_{\emptyset}$ est un espace de décalage.

Exemple B.3. L'ensemble des mots bi-infinis sur $\{0, 1\}$ qui contiennent un nombre pair de 0 entre deux 1 est un espace de décalage. On peut prendre l'ensemble $\{10^{2k+1}1 : k \in \mathbb{N}\}$ comme ensemble de mots interdits. Cette ensemble est souvent appelé le **sous-shift pair**.

On rappelle que σ désigne le shift sur $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ (Définition A.16). On dit qu'un ensemble $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ est invariant par décalage si $\sigma(X) = X$.

Proposition B.4. *Un ensemble $X \subseteq \Sigma^\mathbb{Z}$ est un espace de décalage si et seulement s'il est invariant par décalage et si c'est un fermé (dans la topologie de Cantor).*

En particulier, si X est un espace de décalage, alors (X, σ) est un système dynamique discret.

Définition B.5. Un espace de décalage X est de **type fini** (est un SFT) s'il existe un ensemble fini \mathcal{F} de facteurs interdits tel que $X = X_{\mathcal{F}}$.

L'ensemble $\Sigma^\mathbb{Z}$ est un SFT. Le sous-shift pair est un exemple typique d'espace de décalage qui n'est pas un SFT.

Une autre classe d'espace de décalage est définie à l'aide de graphes. Les graphes que l'on considère sont des couples (V, E) où V est un ensemble fini de sommets et $E \subseteq V \times \Sigma \times V$ est un ensemble d'arêtes étiquetées. Un chemin (bi-infini) dans un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est une suite d'arêtes $(p_i, x_i, q_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{Z}, q_i = p_{i+1}$. Le mot x est l'étiquette du chemin. On note $X_{\mathcal{G}}$ l'ensemble des mots qui étiquettent un chemin de \mathcal{G} . On vérifie facilement que c'est un ensemble fermé et invariant par décalage, c'est donc un espace de décalage.

Définition B.6. Un espace de décalage X est **sofique** s'il existe un graphe \mathcal{G} tel que $X = X_{\mathcal{G}}$. Un tel graphe est une **présentation** de X .

Proposition B.7. *Un espace de décalage sofique est un langage ζ -rationnel.*

Proposition B.8 (Berstel et Perrin [10]). *Un espace de décalage X est sofique si et seulement s'il existe un langage rationnel \mathcal{F} de facteurs interdits tel que $X = X_{\mathcal{F}}$.*

Corollaire B.9. *Tout SFT est sofique.*

Index

- alphabet, 10, 17, 97, 98
- automate fini, 98
- boule ouverte, 2
- Champernowne (suite de), 8
- charge globale, 46
- charge partielle, 46
- chemin, 99
 - acceptant, 78, 100, 101
 - initial, 99
- complétude, 99
- concatenation, 97
- condition d'acceptation, 78
- configuration, 10, 17
 - finie, 14
- conjugaison topologique, 8
- constante d'expansivité, 8
- constante de sensibilité, 7
- cylindre, 11
- De Bruijn (graphe de), 53
- déterminisme, 99
- diagramme espace-temps, 12
- diamant, 13
- distance de Cantor, 11
- distribution, 17
- distribution finie, 52
- doublement de l'angle (système de), 5
- engendrement, 17
- ensemble résiduel, 7
- équation différentielle autonome, 2
- équicontinuité, 7
- équicontinuité (point d'), 7
- espace de décalage, 103
- espace de décalage de type fini, 104
- espace des phases, 2
- état, 98
 - acceptant, 98
 - état quiescent, 14
- étiquette, 99
- expansivité, 8
- expression rationnelle, 98
- extension, 9
- facteur, 9, 97
- facteur interdit, 103
- fonction de transition, 99
- full shift, 9
- graphe produit, 56
- hiérarchie borélienne, 82
- initial (état), 98
- Kleene (fermeture de), 98
- langage, 97
 - ω -rationnel, 100
 - ζ -rationnel, 101
 - d'une formule, 80
 - rationnel, 98
- marge, 38
- mode d'acceptation, 78
- modèle de perturbation, 25
- morphisme, 8
- mot, 97
- mot bloquant, 14
- mot fortement bloquant, 38
- mot vide, 97
- MSO-définissable, 80

- mur, 62
- omega-langage, 97
- omega-mot, 97
- omega-puissance, 100
- orbite, 6
- période, 7
 - spatiale, 12
 - structurelle, 18
- périodique (point), 7
- point fixe, 4
 - attractif, 4
 - stable, 4
- prépériode, 7
- présentation, 104
- presque équicontinuité, 7
- rayon, 10, 17, 19
- reconnaissance, 100, 101
- règle globale, 10, 17
- règle locale, 10, 17
 - étendue, 10
 - linéaire, 59
- règle par défaut, 18
 - droite, 18
 - gauche, 18
- satisfaction, 80
- segment initial, 11
- sensibilité, 7
- seuil de perturbation, 18
- shift, 10, 101
- sofique, 104
- sous-shift pair, 103
- sous-système, 9
- spatialement périodique (point), 12
- stabilité structurelle, 25
- suite logistique, 6
- système dynamique, 2
 - discret, 5
- système itératif, 5
- système périodique, 7
- système ultimement périodique, 7
- taille, 97
- trajectoire, 6
- transition, 98
- transitivité, 7
- ultimement périodique (point), 7
- Verhulst (équation de), 3
- zeta-langage, 97
- zeta-mot, 97

Table des figures

I.1	Solutions de l'équation de Verhulst.	4
I.2	Suite logistique pour $\mu = 1.1$	6
I.3	Diagramme commutatif d'un morphisme.	9
I.4	Diagramme commutatif entre $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ et (\mathbb{T}, D)	9
I.5	Diagramme espace-temps du shift sur deux états.	12
I.6	Un diamant.	14
I.7	Diagramme espace-temps de l'automate «majorité».	15
III.1	Diagramme espace-temps du premier contre-exemple.	29
III.2	Diagramme espace-temps de H_7	30
III.3	Diagramme espace-temps du second contre-exemple.	32
III.4	Diagramme espace-temps de H_8	33
III.5	Diagramme espace-temps de H_8 sur une configuration 2-finie.	34
III.6	Diagramme espace-temps de H_8 sur une configuration 0-finie.	37
III.7	Un mot fortement bloquant.	39
III.8	Un mot fortement bloquant pour un automate cellulaire équi- continu.	42
IV.1	Dynamique d'un $r\nu$ -CA non conservatif avec une distribution sur \mathcal{R}	51
IV.2	Dynamique d'un $r\nu$ -CA conservatif avec une distribution sur \mathcal{R}	51
IV.3	Graphe de De Bruijn de $\{id, \oplus\}$	53
IV.4	Automate reconnaissant \mathcal{F} pour $\mathcal{R} = \{id, \oplus\}$	55
IV.5	Graphe produit de $\{id, \oplus\}$	57
IV.6	La suite $u_\psi(v)$	63
IV.7	Représentation conceptuelle de la reconnaissance de distribu- tions équicontinues.	70
IV.8	Automate reconnaissant les distributions équicontinues.	73
IV.9	La suite $(d(n))_{n \geq 2}$	75
V.1	Hierarchie des classes connues avant [3].	84
V.2	Un CDFA reconnaissant $(a + b)^*a^\omega$ sous la condition L'.	90
V.3	Un DFA reconnaissant $ab^*a(a + b)^\omega$ sous la condition L'.	90
V.4	Un CFA reconnaissant $(a + b)^*ba^\omega$ sous la condition L'.	91

V.5	Un CDFA reconnaissant $a(a^*b)^\omega + b(a+b)^*a^\omega$ sous la condition (fn, =).	95
V.6	Hierarchie des classes complétée.	96

Publications personnelles

- [1] Gianpiero CATTANEO, Alberto DENNUNZIO, Enrico FORMENTI et Julien PROVILLARD : Non-uniform cellular automata. *In Language and Automata Theory and Applications*, volume 5427 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 302–313, 2009.
- [2] Alberto DENNUNZIO, Enrico FORMENTI et Julien PROVILLARD : Local rule distributions, language complexity and non-uniform cellular automata. *Theoretical Computer Science*, à paraître.
- [3] Alberto DENNUNZIO, Enrico FORMENTI et Julien PROVILLARD : Acceptance conditions for ω -languages. *In* Hsu-Chun YEN et Oscar H. IBARRA, éditeurs : *Developments in Language Theory*, volume 7410 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 320–331. Springer, 2012.
- [4] Alberto DENNUNZIO, Enrico FORMENTI et Julien PROVILLARD : Computational complexity of rule distributions of non-uniform cellular automata. *In Language and Automata Theory and Applications*, volume 7183 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 204–215, 2012.
- [5] Alberto DENNUNZIO, Enrico FORMENTI et Julien PROVILLARD : Non-uniform cellular automata : Classes, dynamics, and decidability. *Information and Computation*, 215:32–46, 2012.

Bibliographie

- [6] Andrew ADAMATZKY : *Game of Life Cellular Automata*. Springer, 2010.
- [7] Serafino AMOROSO et Yale N. PATT : Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. *Journal of Computer and System Sciences*, 6(5):448–464, 1972.
- [8] Tom M. APOSTOL : *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1976.
- [9] S. BASU, P. Pal CHAUDHURI, D. Roy CHOWDHURY et I. Sen GUPTA : Design of CAECC - cellular automata based error correcting code. *IEEE Transactions on Computers*, 43:759–764, 1994.
- [10] Jean BERSTEL et Dominique PERRIN : Finite and infinite words. In Cambridge university PRESS, éditeur : *Algebraic combinatorics on words*. Cambridge, 2002.
- [11] François BLANCHARD et Pierre TISSEUR : Some properties of cellular automata with equicontinuity points, 2000.
- [12] Nino BOCCARA et Henryk FUKS : Number-conserving cellular automaton rules. *Fundamenta Informaticae*, 52:1–13, 2002.
- [13] Julius R. BÜCHI : Symposium on decision problems : On a decision method in restricted second order arithmetic. In Patrick Suppes ERNEST NAGEL et Alfred TARSKI, éditeurs : *Logic, Methodology and Philosophy of Science Proceeding of the 1960 International Congress*, volume 44 de *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 1–11. Elsevier, 1960.
- [14] Gianpiero CATTANEO, Enrico FORMENTI, Luciano MARGARA et Giancarlo MAURI : On the dynamical behavior of chaotic cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 217(1):31–51, 1999.
- [15] Kevin CATTELL et Jon C. MUZIO : Synthesis of one-dimensional linear hybrid cellular automata. *IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits and Systems*, 15(3):325–335, 1996.

- [16] Parimal P. CHAUDHURI, Dipanwita R. CHOWDHURY, Sukumar NANDI et Santanu CHATTOPADHYAY : *Additive Cellular Automata : Theory and Applications*, volume 1. John Wiley & Sons, 1997.
- [17] Bastien CHOPARD : Cellular automata modeling of physical systems. In *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, pages 865–892. 2009.
- [18] Donato D'AMBROSIO, Salvatore Di GREGORIO, William SPATARO et Giuseppe A. TRUNFIO : A model for the simulation of forest fire dynamics using cellular automata. In A. VOINOV, A. JAKEMAN et A. RIZZOLI, éditeurs : *Proceedings of the iEMSs Third Biennial Meeting : "Summit on Environmental Modelling and Software"*, 2006.
- [19] Nicolaas Govert de BRUIJN : A combinatorial problem. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 49:758–764, 1946.
- [20] Marianne DELORME, Jacques MAZOYER, Nicolas OLLINGER et Guillaume THEYSSIER : Bulking ii : Classifications of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 412:3881–3905, 2011.
- [21] Bruno DURAND, Enrico FORMENTI et Zsuzsanna RÓKA : Number-conserving cellular automata I : decidability. *Theoretical Computer Science*, 299:523–535, 2003.
- [22] Bruno DURAND, Enrico FORMENTI et Georges VAROUCAS : On undecidability of equicontinuity classification for cellular automata. In Michel MORVAN et Éric RÉMILA, éditeurs : *Discrete Models for Complex Systems, DMCS'03*, volume AB de *DMTCS Proceedings*, pages 117–128. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2003.
- [23] Fabio FARINA et Alberto DENNUNZIO : A predator-prey cellular automaton with parasitic interactions and environmental effects. *Fundamenta Informaticae*, 83(4):337–353, 2008.
- [24] Nazim A. FATÈS : Critical phenomena in cellular automata : perturbing the update, the transitions, the topology. *Acta Physica Polonica B*, 2010.
- [25] Enrico FORMENTI et Aristide GRANGE : Number conserving cellular automata II : dynamics. *Theoretical Computer Science*, 1-3(304):269–290, 2003.
- [26] Enrico FORMENTI, Jarkko KARI et Siamak TAATI : On the hierarchy of conservation laws in a cellular automaton. *Natural Computing*, 10(4):1275–1294, 2011.
- [27] Ampara FÚSTER-SABATER, Pino CABALLERO-GIL et Maria Eugenia PAZO-ROBLES : Application of linear hybrid cellular automata to stream ciphers. In *Computer Aided Systems Theory - EUROCAST 2007*, volume 4739 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 564–571. Springer, 2007.

- [28] Peter GACS : Reliable computation with cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences*, 32(1):15–78, 1986.
- [29] Philip GERLEE et Alexander R. A. ANDERSON : Stability analysis of a hybrid cellular automaton model of cell colony growth. *Physical Review E*, 75:051911, 2007.
- [30] Robert H. GILMAN : Classes of linear automata. *Ergodic theory and dynamical systems*, 7:105–118, 1987.
- [31] Mathias HALBACH et Rolf HOFFMANN : Implementing cellular automata in FPGA logic. In *International Parallel and Distributed Processing Symposium*, volume 16, Los Alamitos, CA, USA, 2004.
- [32] Juris HARTMANIS et Richard E. STEARNS : Sets of numbers defined by finite automata. *American Mathematical Monthly*, 74:539–542, 1967.
- [33] Gustav A. HEDLUND : Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems. *Mathematical Systems Theory*, 3(4):320–375, 1969.
- [34] Bernardo A. HUBERMAN et Natalie S. GLANCE : Evolutionary games and computer simulations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 90(16):7716–7718, 1993.
- [35] Lemont B. KIER, Danaïll BONCHEV et Gregory A. BUCK : Modeling biochemical networks : a cellular-automata approach. *Chemistry & Biodiversity*, 2:233–243, 2005.
- [36] Tomoyoshi KOBORI, Tsutomu MARUYAMA et Tsutomu HOSHINO : A cellular automata system with FPGA. In *Proceedings of the the 9th Annual IEEE Symposium on Field-Programmable Custom Computing Machines*, FCCM '01, pages 120–129, Washington, DC, USA, 2001. IEEE Computer Society.
- [37] Petr KŮRKA : Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 17:417–433, 1997.
- [38] Petr KŮRKA : *Topological and symbolic dynamics*, volume 11 de *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, 2003.
- [39] Orna KUPFERMAN et Moshe Y. VARDI : From complementation to certification. In Kurt JENSEN et Andreas PODELSKI, éditeurs : *10th TACAS*, volume 2988 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 591–606. Springer, 2004.
- [40] R. P. KURSHAN : *Computer aided verification of coodinating process*. Princeton Univ. Press, 1994.
- [41] Lawrence H. LANDWEBER : Decision problems for omega-automata. *Mathematical Systems Theory*, 3(4):376–384, 1969.
- [42] Douglas LIND et Brian MARCUS : *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, New York, 1995.
- [43] Igor LITOVSKY et Ludwig STAIGER : Finite acceptance of infinite words. *Theoretical Computer Science*, 174(1-2):1–21, 1997.

- [44] Giovanni MANZINI et Luciano MARGARA : A complete and efficiently computable topological classification of d-dimensional linear cellular automata over $\mathbb{Z}m$. *Theoretical Computer Science*, 221(1-2):157–177, 1999.
- [45] Carsten MARR et Marc-Thorsten HÜTT : Outer-totalistic cellular automata on graphs. *Physics Letters A*, 373(5):546–549, 2009.
- [46] Bruno MARTIN : A walsh exploration of elementary ca rules. *Journal of Cellular Automata*, 3(2):145–156, 2008.
- [47] Edward F. MOORE : Machine models of self-reproduction. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 14:13–33, 1962.
- [48] Tetsuo MORIYA et Hideki YAMASAKI : Accepting conditions for automata on ω -languages. *Theoretical Computer Science*, 61:137–147, 1988.
- [49] Yiannis N. MOSCHOVAKIS : *Descriptive set theory*, volume 100 de *Studies in logic and the foundations of mathematics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.
- [50] David E. MULLER. : Infinite sequences and finite machines. In *Proceedings of the 1963 Proceedings of the Fourth Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design*, SWCT '63, pages 3–16, Washington, DC, USA, 1963. IEEE Computer Society.
- [51] John MYHILL : The converse to Moore's garden-of-eden theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 14:685–686, 1963.
- [52] John Von NEUMANN : *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, Champaign, IL, USA, 1966.
- [53] Isaac NEWTON : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Apud Guil. & Joh. Innys, Londres, 1726.
- [54] Nicolas OLLINGER : Intrinsically universal cellular automata. In *CSP*, pages 199–204, 2008.
- [55] Dominique PERRIN et Jean-Eric PIN : *Infinite words : automata, semi-groups, logic and games*, volume 141 de *Pure and applied mathematics*. Elsevier, 2004.
- [56] Henri POINCARÉ et Eugène FICHOT : *Leçons de mécanique céleste*. Cours de la faculté des sciences de Paris. Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- [57] Franciszek SEREDYNSKI, Pascal BOUVRY et Albert Y. ZOMAYA : Cellular automata computations and secret key cryptography. *Parallel Computing*, 30(5-6):753–766, 2004.
- [58] Moshe SIPPER et Marco TOMASSINI : Co-evolving parallel random number generators. In *Parallel Problem Solving from Nature / PPSN IV*, volume 1141 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 950–959. Springer-Verlag, 1996.
- [59] Ludwig STAIGER : ω -languages. In *Handbook of formal languages*, volume 3, pages 339–387. 1997.

- [60] Ludwig STAIGER et Klaus W. WAGNER : Automatentheoretische und automatenfreie charakterisierungen topologischer klassen regulärer folgenmengen. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, 10(7):379–392, 1974.
- [61] Klaus SUTNER : De Bruijn graphs and linear cellular automata. *Complex Systems*, 5:19–30, 1991.
- [62] Wolfgang THOMAS : Automata on infinite objects. In J. van LEEUWEN, éditeur : *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B (Formal models and semantics), pages 135–191. Elsevier, 1990.
- [63] Wolfgang THOMAS : Languages, automata and logic. In *Handbook of formal languages*, volume 3, pages 389–455. 1997.
- [64] Moshe Y. VARDI : The Büchi complementation saga. In Wolfgang THOMAS et Pascal WEIL, éditeurs : *STACS 2007*, volume 4393 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 12–22. Springer, 2007.
- [65] Pierre-François VERHULST : Recherches mathématiques sur la loi d’accroissement de la population. In *Nouveaux Mémoires de l’Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, volume 18, pages 1–42. L’Académie Royale de Bruxelles et de l’Université Louvain, Bruxelles, 1845.
- [66] Klaus W. WAGNER : *Zur Theorie der regulären Folgenmengen*. 1976.
- [67] Klaus W. WAGNER : On ω -regular sets. *Information and Control*, 43(2):123–177, 1979.
- [68] Stephen WOLFRAM : Universality and complexity in cellular automata. *Physica D*, 10:1–35, 1984.
- [69] Stephen WOLFRAM : Cryptography with cellular automata. In *CRYPTO*, pages 429–432, 1985.